

SÉRIE A : N° 58.

N° D'ORDRE : N° 69.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Par M. Pierre LEMAIRE

Enseigne de vaisseau de 1^{re} classe,
Ingénieur diplômé de l'École supérieure d'électricité.

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES COMPAS GYROSCOPIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *12 juillet* 1911, devant la Commission d'examen.

MM. PAUL APPELL, doyen,

Président.

H. POINCARÉ, de l'Académie française,

C. GUICHARD,

} *Examineurs.*

PARIS

R. CHAPELOT et C^{ie}, ÉDITEURS

30, Rue et Passage Dauphine, 30

1911

A : N° 58.

ORDRE : N° 69.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Par M. Pierre LEMAIRE

Enseigne de vaisseau de 1^{re} classe,
Ingénieur diplômé de l'École supérieure d'électricité.

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES COMPAS GYROSCOPIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

refait

1911, devant la Commission d'examen.

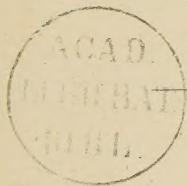
MM. PAUL APPELL, doyen,

Président.

H. POINCARÉ, de l'Académie française,

} *Examineurs.*

C. GUICHARD,



PARIS

R. CHAPELOT et C^{ie}, ÉDITEURS

30, Rue et Passage Dauphine, 30

—
1911

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

<i>Doyen</i>	P. APPELL, <i>Professeur</i> .	Mécanique rationnelle.
<i>Doyen honoraire</i>	G. DARBOUX, —	Géométrie supérieure.
<i>Professeurs honoraires</i> ..	L. TROOST.	
	Ch. WOLF.	
	J. RIBAN.	
<i>Professeurs</i>	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathém. et calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathém. et mécanique céleste.
	Y. DELAGE.....	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Physique.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie.
	Gabriel BERTRAND.....	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	BOREL	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	Jean PERRIN.....	Chimie. Physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	N	Application de l'analyse à la géométrie.
	N	Calcul différentiel et calcul intégral.
<i>Professeurs-adjoints</i>	PUISEUX.....	Mécanique et astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	Léon BERTRAND.....	Géologie.
	Rémy PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	COTTON.....	Physique.
<i>Secrétaire</i>	D. TOMBECK.	

À LA MÉMOIRE DE MON PETIT PIERRE

A MA FEMME



Digitized by the Internet Archive
in 2026

A MONSIEUR LE VICE-AMIRAL BOUÉ DE LAPEYRÈRE

ANCIEN MINISTRE DE LA MARINE

A MONSIEUR LE CAPITAINE DE FRÉGATE MOULLÉ

ANCIEN COMMANDANT DE LA STATION DES SOUS-MARINS DE CHERBOURG

*Hommage respectueusement dévoué
et témoignage de reconnaissance.*

Avant de commencer ce travail, j'ai le devoir d'exprimer à Monsieur Appell, doyen de la Faculté des Sciences, toute la reconnaissance que je lui dois pour m'avoir accueilli avec une si réelle bonté que j'ai toujours trouvé trop courts les nombreux entretiens qu'il a bien voulu m'accorder. Le Doyen voudra bien accepter ici tous mes remerciements pour m'avoir donné tant de facilités à briguer un titre dont j'apprécie tout l'honneur. Et le savant professeur me permettra de lui dire combien j'ai été « charmé » d'assister à ses cours : la pureté de son langage, la simplicité de ses explications ont toujours su éclaircir les notions troubles que je pouvais posséder.

Je présente à Monsieur Henri Poincaré, de l'Académie Française, l'hommage reconnaissant de mon plus respectueux dévouement. Le Maître éminent dont la science fait l'admiration de tous peut être assuré que je sais apprécier le grand honneur qu'il me fait en voulant bien se constituer mon juge.

Je remercie Monsieur Guichard d'avoir bien voulu accepter la tâche vraiment fastidieuse d'éplucher mon travail : ses conseils m'ont été précieux. Je lui suis vraiment reconnaissant d'avoir pris un si vif intérêt au sujet qu'il le désirât voir traité avec plus de science : j'exprime à nouveau à Monsieur Guichard tous mes regrets de ce que les circonstances ne m'aient pas permis de déférer à son désir.

Je serais vraiment ingrat si je ne priais Monsieur Tombeck, secrétaire de la Faculté des Sciences, d'agréer tous mes remerciements pour sa sollicitude vis-à-vis d'un novice et toute ma reconnaissance pour la part active qu'il a bien voulu prendre à la défense de mes intérêts.

PIERRE LEMAIRE.

PREMIÈRE THÈSE

THÉORIE DES COMPAS GYROSCOPIQUES

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

Paragraphes.	Pages.
1. Utilité d'un compas gyroscopique.....	1
2. Conception d'un compas gyroscopique.....	2
3. Propriété fondamentale du gyroscope.....	2
4. L'expérience de Foucault.....	4
5. Généralisation.....	6
6. Le compas gyroscopique.....	8

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie mécanique du compas gyroscopique.

CHAPITRE I^{er}.

ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN COMPAS GYROSCOPIQUE A BORD D'UN NAVIRE AU REPOS.

7. Repérage de la position d'un corps et représentation de son mouvement.....	9
8. Cas particulier du compas gyroscopique.....	10
9. Définition des coordonnées.....	13
10. Expressions de p , q , r	14
11. Equations d'Euler.....	14
12. Expressions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$	15
13. Expressions de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$	16
14. Equations générales du mouvement du compas gyroscopique.	16

Paragraphes.	Pages.
15. Mouvement oscillatoire du compas gyroscopique autour du méridien : mouvement dit de « précession ».....	17
16. Discussion.....	19
17. Mouvement oscillatoire du compas gyroscopique dans le plan vertical passant par l'axe de rotation du tore : mouvement dit de « nutation ».....	21
18. Mouvement général du centre de gravité du compas gyroscopique.....	22
19. Résumé du chapitre I ^{er}	26

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA POSITION D'ÉQUILIBRE DU COMPAS GYROSCOPIQUE A BORD D'UN NAVIRE AU REPOS.

20. Etude de la position d'équilibre du compas gyroscopique....	26
21. Discussion.....	26
22. Résumé du chapitre II.....	28

DEUXIÈME PARTIE.

Étude de la position d'équilibre et du mouvement du compas gyroscopique, supposé en équilibre dans le plan méridien, à bord d'un navire en marche.

CHAPITRE I^{er}.

DÉVIATION PERMANENTE (variation).

23. Déviation permanente du compas gyroscopique à bord d'un navire non oscillant et conservant une route et une vitesse constantes.....	29
---	----

CHAPITRE II.

DÉVIATIONS BALISTIQUES.

24. Position du problème.....	31
25. Déviation balistique due aux changements de vitesse d'un navire suivant une route fixe.....	32
26. Déviation balistique due aux girations d'un bâtiment marchant à vitesse constante.....	34
27. Conclusions. Détermination de la période. Compas gyroscopique compensé.....	39
28. Déviations balistiques dues au roulis et au tangage.....	41

CHAPITRE III.

INFLUENCE D'UNE VARIATION DE VITESSE DU TORE SUR L'ÉQUILIBRE
DU COMPAS GYROSCOPIQUE.

Paragraphes.	Pages.
29. Modification de l'angle θ sous l'influence d'une variation de vitesse du tore.....	41
30. Influence d'une variation de vitesse du tore (cessation de courant).....	42

TROISIÈME PARTIE.

Étude sommaire de l'amortissement du mouvement des compas
et des systèmes amortisseurs.

31. Nécessité d'un système amortisseur.....	44
32. Conditions que doit remplir le système amortisseur.....	44
33. Discussion de l'équation d'un mouvement oscillatoire amorti dans le cas où l'amortissement est proportionnel à la vitesse.....	45
34. Discussion des équations types dans le cas des oscillations du compas gyroscopique.....	49
35. Discussion des équations types dans le cas des elongations balistiques du compas gyroscopique.....	52
36. Système amortisseur à réaction d'air.....	55
37. Discussion du système amortisseur à jet d'air.....	58
38. Calcul de l'erreur due au système amortisseur dans les changements en latitude.....	58
39. Calcul des poids qu'il faut ajouter à l'appareil pour annuler l'angle θ en un lieu donné de la terre.....	59
40. Autre remarque sur le système amortisseur à réaction d'air..	60
41. Compas gyroscopique Lemaire.....	61

CONCLUSIONS	62
-------------------	----

Note sur la valeur de la rotation propre du compas gyroscopique	65
---	----

Ordre de grandeur des différentes constantes d'un compas gyroscopique.....	72
--	----

Table donnant les valeurs de $\frac{\cos R_v}{900 \cos L}$	73
--	----

THÉORIE

DES

COMPAS GYROSCOPIQUES

A la mémoire de FOUCAULT.

INTRODUCTION.

§ 1. — **Utilité d'un compas gyroscopique.** — L'emploi, désormais unique, de matériaux en fer et en acier dans la construction des navires modernes, rend de plus en plus délicat l'usage du compas magnétique, et la nécessité de remplacer cet appareil par un appareil insensible aux perturbations magnétiques de tout ordre est aujourd'hui impérieuse.

Le degré de perfection des roses Thomson est tel que les améliorations que l'on pourrait y apporter ne constitueraient pas, à coup sûr, un perfectionnement de nature à en révolutionner l'emploi. Par ailleurs, d'illustres savants, tels que Poisson et lord Kelvin, ont attaché leur nom au problème de la compensation des forces perturbatrices dues aux diverses masses de fer qui constituent le navire moderne. Encore cette compensation se fait-elle à l'aide d'aimants permanents, qui diminuent singulièrement la force directrice moyenne au centre de la rose. La position d'équilibre de la rose est alors bien mal déterminée : un frottement insensible, les vibrations du navire en marche suffisent pour en troubler profondément les indications. A bord des sous-marins, à l'intérieur des blockhaus,

ou dans les fonds des cuirassés, les indications des compas magnétiques n'ont *pratiquement* aucune valeur. Et, sur les sous-marins notamment, le problème se complique si l'on envisage l'influence que peuvent avoir sur les roses des courants dont l'intensité est de l'ordre de plusieurs centaines d'ampères, et qui forment d'innombrables circuits en tous sens.

§ 2. — **Conception d'un compas gyroscopique.** — En 1852, Foucault présenta à l'Académie des Sciences le résultat de ses expériences sur le gyroscope. Il exposa notamment le fait suivant :

Si, en un lieu déterminé de la terre, on oblige l'axe d'un gyroscope à se mouvoir dans un plan horizontal, l'axe du tore, sous l'influence du mouvement de la terre, s'oriente dans le plan du méridien géographique après une série d'oscillations, tout comme l'aiguille aimantée s'oriente dans le plan du méridien magnétique.

Et, de plus, les sens relatifs des rotations du tore et de la terre déterminent réellement un pôle Nord et un pôle Sud de l'axe du tore : l'axe du tore se placera toujours dans le plan méridien, de façon que les rotations du tore et de la terre soient de même sens.

On conçoit donc qu'un gyroscope dont le mouvement continu est entretenu par un moyen électrique, par exemple, et dont l'axe ne peut se mouvoir que dans un plan horizontal, constitue un compas au sens propre du mot, c'est-à-dire un appareil pouvant rigoureusement remplacer l'aiguille aimantée.

Cet appareil sera absolument insensible aux variations de l'état magnétique du navire, car sa propriété d'orientation vers le Nord résulte, non d'une attraction magnétique quelconque, mais bien d'un Théorème de Mécanique rationnelle que nous nous proposons d'exposer.

§ 3. — **Propriété fondamentale du gyroscope.** — Un gyroscope est constitué par un corps de révolution, généralement un tore, tournant rapidement autour de son axe (*fig. 1*).

Soit un disque tournant sans frottement autour d'un axe perpendiculaire à ses faces en son centre C, avec une vitesse angulaire constante ω dont le sens est l . Supposons que ce disque puisse pivoter autour d'un axe horizontal yy parallèle et médian au disque.

Le disque sera en équilibre autour de yy , quelles que soient sa position et la direction de cet axe.

Si le frottement autour de yy est nul, une impulsion donnée au disque dans le sens m le fera pivoter autour de yy avec une vitesse

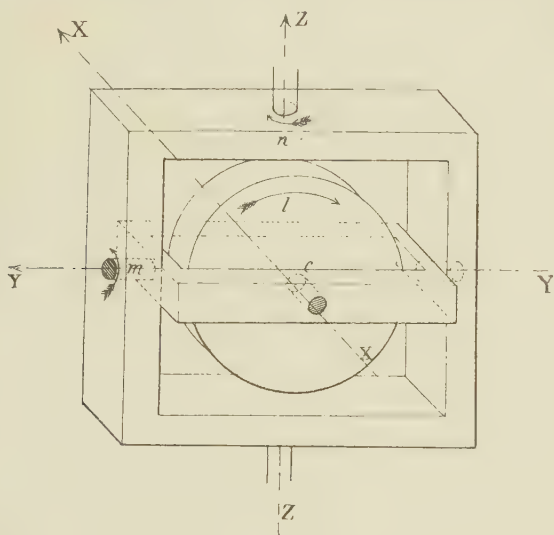


Fig. 1.

angulaire Ω qui se maintiendra indéfiniment comme le mouvement ω : ces deux mouvements sont, en effet, constamment en quadrature, et l'un ne peut exercer sur l'autre aucune modification.

On démontre en Mécanique que :

Un solide de révolution, suspendu par son centre de gravité, étant animé autour de son axe xx d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω , si cet axe xx reçoit un second mouvement de vitesse angulaire Ω autour du centre de gravité, il faut, pour maintenir l'axe xx dans le même plan, exercer sur lui et à angle droit, avec la direction de Ω , une pression constante en grandeur et en direction qui a pour expression :

$$F_x = \frac{\delta \omega \Omega}{l},$$

δ étant l'expression du moment d'inertie du disque par rapport à l'axe xx ;

l étant la distance des coussinets sur lesquels repose l'axe xx .

Le sens n , de la pression F_z , dépend du sens relatif des mouvements ω et Ω . Avec les sens l et m adoptés sur la figure, n a le sens que nous lui avons figuré.

Nous n'insisterons pas sur la démonstration de cette relation fondamentale, qui se trouve dans tous les traités de Mécanique rationnelle.

Cette propriété fondamentale permet d'expliquer tous les phénomènes gyroscopiques. En particulier, elle montre bien l'absurdité qu'il y a de croire que les seuls effets gyroscopiques peuvent assurer la stabilité malgré les couples appliqués, puisque le gyroscope réagit sous l'effet de ces couples. Toutes les expériences auxquelles se prête le gyroscope (tourniquets à tension et à poids de Gruey, culbuteur de Hardy, culbuteur de Gruey, pendule conique spiraloïde, etc.), s'expliquent aisément par la seule considération qui précède. Mais nous n'y insisterons pas, car notre sujet est de traiter non l'ensemble très varié des phénomènes plus ou moins curieux du gyroscope, mais bien l'application que l'on peut faire du gyroscope comme compas de navigation.

§ 4. — **L'expérience de Foucault.** — Appliquons ces considérations au phénomène cité en 1852 par Foucault à l'Académie des Sciences.

Tous ces problèmes se résolvent assez facilement par l'application des divers Théorèmes sur les mouvements relatifs. Mais, avant d'entamer l'étude mathématique complète des compas gyroscopiques, nous avons voulu faire la part de ceux que rebûte le calcul mathématique, et expliquer par des considérations très élémentaires le curieux phénomène d'orientation.

Réalisons l'appareil gyroscopique suivant (*fig. 2*) :

Plaçons le disque dans un cadre A, qui pourra lui-même pivoter autour de l'axe zz . Les pivots de l'axe zz reposent sur des coussinets placés dans un cadre B. Le tout est arrangé de façon que le centre de gravité de l'appareil coïncide avec le centre du disque.

En un point quelconque de la terre, plaçons cet appareil. Le cadre B est fixé sur la terre de telle façon que l'axe zz soit placé perpendiculairement à l'axe NS de la terre. On oriente le cadre A de façon que le disque soit placé dans le plan du méridien; l'axe xx est, par

suite, dirigé Est-Ouest, et dans un plan parallèle à celui de l'Équateur.

L'appareil placé, donnons au disque un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante ω , de telle façon que la partie supérieure horizontale aille du Nord vers le Sud.

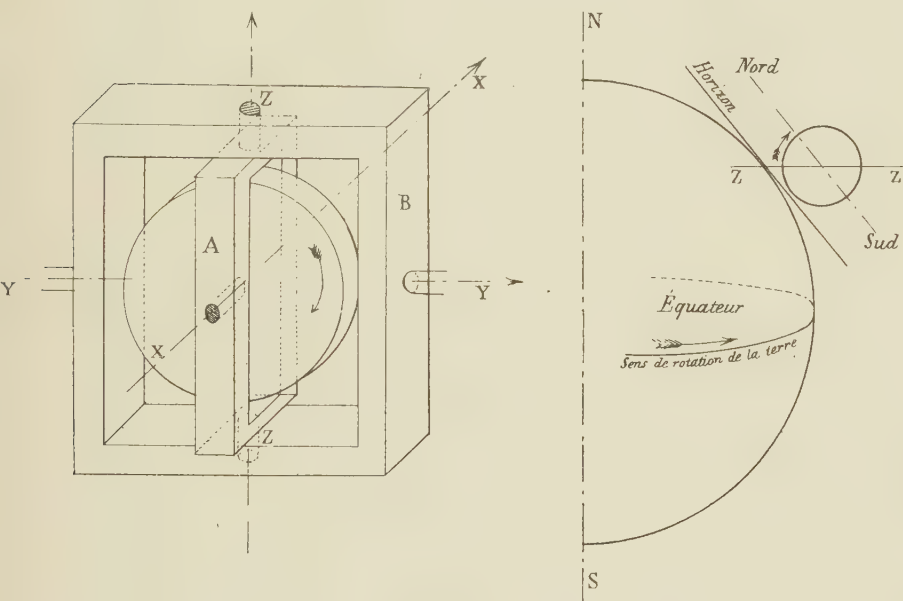


Fig. 2.

On verra alors l'axe du disque, d'abord parallèle au plan de l'Équateur, faire avec ce plan un angle de plus en plus grand avec une vitesse croissante : l'extrémité Est de l'axe s'avancant vers le Nord. La vitesse de ce mouvement d'élévation de l'axe vers le Nord sera maxima lorsque l'axe sera dans le plan du méridien.

En vertu de la vitesse acquise, l'axe dépassera le plan du méridien, et — puisque l'on suppose nuls les frottements — reprendra la position Est-Ouest primitive, mais la pointe Est primitive se trouvant maintenant à l'Ouest.

A partir de ce moment, l'axe se dirigera à nouveau vers le Nord, en sens inverse.

En d'autres termes, l'axe de rotation du gyroscope oscillera d'un mouvement sinusoïdal autour du méridien.

L'explication est simple si l'on considère la propriété fondamentale du gyroscope.

Le cadre B étant entraîné par le mouvement de la terre, imprime par suite au tore une rotation autour de l'axe yy — rotation, dont la vitesse angulaire constante est égale à celle de la terre, Ω .

La pression F_z qui s'exerce sur l'extrémité de l'axe xx prend immédiatement naissance; elle crée un couple qui tend à faire tourner le gyroscope autour de l'axe zz . Comme le cadre A est mobile autour de cet axe zz , ce couple fait effectivement tourner l'appareil. La force F_z , qui est, à proprement parler, la force directrice, est constante en grandeur et toujours normale au mouvement Ω :

$$F_z = \frac{\partial \omega \Omega}{l}.$$

L'appareil prend donc un mouvement sinusoïdal dont la période T est donnée par la formule classique :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{C}{\partial \omega \Omega}},$$

C étant le moment d'inertie de l'ensemble de l'appareil autour de l'axe zz .

§ 5. — **Généralisation.** — Il est très délicat de placer rigoureusement en tout lieu de la terre, l'axe zz perpendiculairement à l'axe de la terre. A l'Équateur, la chose est simple : il suffit de rendre zz vertical.

Il est beaucoup plus facile d'opérer de la même façon en toutes les latitudes : l'axe zz sera donc partout vertical. Mais alors la composante de la rotation de la terre suivant l'axe yy deviendra :

$$\Omega \cos L.$$

L étant la latitude du lieu.

L'expression de la force directrice devient donc :

$$F_z = \frac{\partial \omega \Omega \cos L}{l},$$

et la période sera :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{C}{\partial \omega \Omega \cos L}}.$$

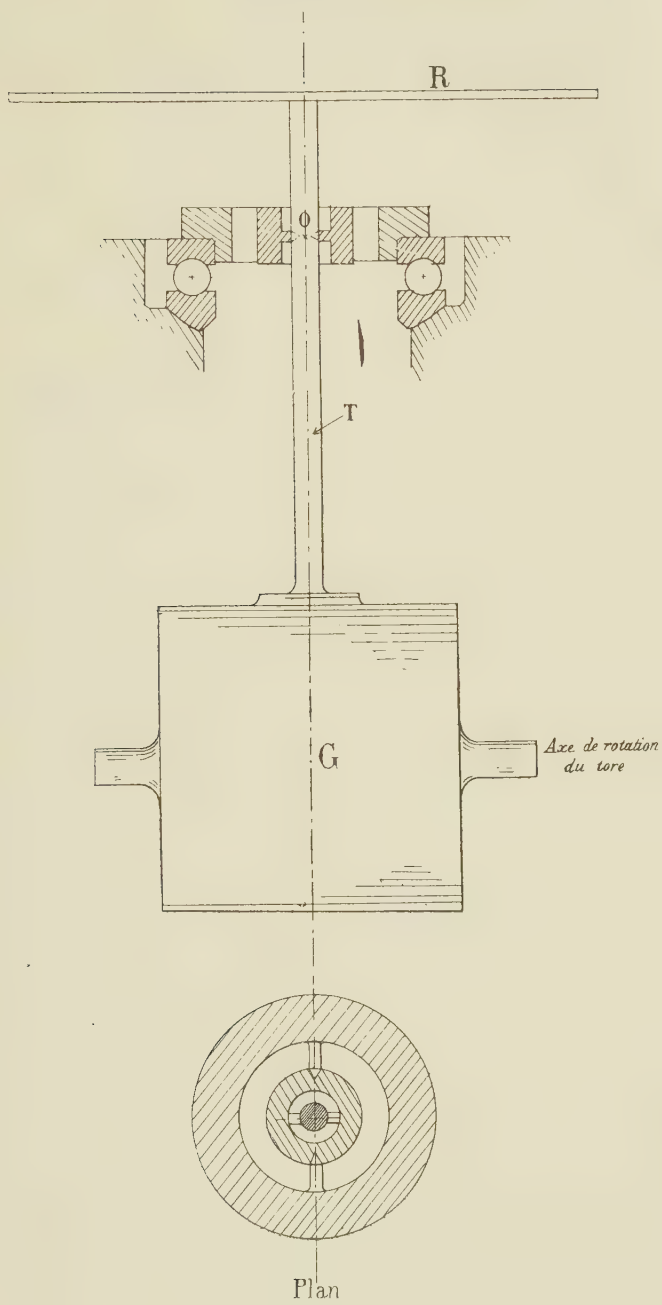


Fig. 3.

§ 6. — **Le compas gyroscopique.** — A bord d'un navire, la question est beaucoup plus complexe. Le moyen le plus simple de maintenir vertical l'axe zz , malgré les mouvements de toutes sortes du bâtiment, est de suspendre l'appareil gyroscopique à une cardan de façon que le centre de gravité se trouve en dessous du point de suspension qui est le centre de la cardan.

Schématiquement, un compas gyroscopique sera donc constitué de la façon suivante (*fig. 3*) :

L'équipage gyroscopique G sera fixé à une tige T qui sera suspendue par une cardan dont nous figurons le centre en O .

L'extrémité supérieure de la tige T portera une rose des vents R .

La cardan est supportée par une butée qui permet à l'ensemble gyroscopique de tourner dans tous les azimuts.

Les poids et les dimensions des différentes pièces seront tels que le centre de gravité de tout le système oscillant soit situé en dessous du point O .

Tout cet appareil pourra être disposé dans une cuvette analogue à la cuvette qui contient les roses magnétiques. La cuvette sera placée dans un fût quelconque.

Le mouvement de cet appareil n'est plus aussi simple que celui de l'appareil précédent (§ 4).

Par suite de son mouvement autour de l'axe zz , le gyroscope exerce sur cet axe un couple toujours situé dans le plan zOx , mais dont le sens et la grandeur varient avec le sens et la grandeur de la vitesse du mouvement d'oscillation de l'axe du tore autour du méridien. Dans l'appareil du § 4, l'axe zz était absolument fixe et la réaction des pivots détruisait l'effet de ce couple. Ici, l'axe zz est mobile autour du point O et l'effet différentiel du couple est de créer un mouvement pendulaire de l'ensemble de l'appareil autour d'un axe horizontal perpendiculaire en O au plan zOx .

C'est l'étude complète de ce problème de pure Mécanique rationnelle que nous nous proposons de faire dans ce travail.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE MÉCANIQUE DU COMPAS GYROSCOPIQUE.

Dans tout ce qui va suivre nous supposerons nuls tous les frottements quels qu'ils soient.

On peut arriver à l'étude du mouvement du compas gyroscopique soit en appliquant la méthode de Lagrange, soit en appliquant les équations d'Euler.

L'emploi comparé de ces deux méthodes nous a permis de voir que la seconde présente une simplicité d'exposition beaucoup plus grande; aussi est-ce uniquement celle-là que l'on trouvera dans les pages suivantes.

CHAPITRE PREMIER.

Étude du mouvement d'un compas gyroscopique à bord d'un navire au repos.

§ 7. — Repérage de la position d'un corps et représentation de son mouvement. — Nous employons la méthode classique de l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point fixe.

Soit O le point fixe. L'ensemble OTG (*fig. 4*) représente l'appareil gyroscopique. Pour plus de clarté dans la figure, nous avons supprimé la rose R :

1° — Ox , Oy , Oz sont les axes principaux d'inertie du corps pour le point O .

2° — Pour définir la position du corps, rapportons les axes Ox , Oy , Oz liés au corps et, *par conséquent, mobiles*, à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace Ox' , Oy' , Oz' .

Nous utiliserons les coordonnées de direction θ , φ , ψ .

L'intersection OA du plan xOy avec le plan $x'Oy'$ est la *ligne des nœuds*. Son angle ψ avec Ox' s'appelle *précession*. L'axe Ox fait avec la ligne des nœuds un angle φ appelé *rotation propre*. Enfin, Oz fait avec Oz' un angle θ appelé *nutation*.

3° — Pour définir le mouvement du corps, dont le point O est fixe, nous donnerons ses vitesses de rotation instantanées autour des axes mobiles : p autour de Ox , q autour de Oy , r autour de Oz . Elles sont représentées par des vecteurs menés sur ces axes.

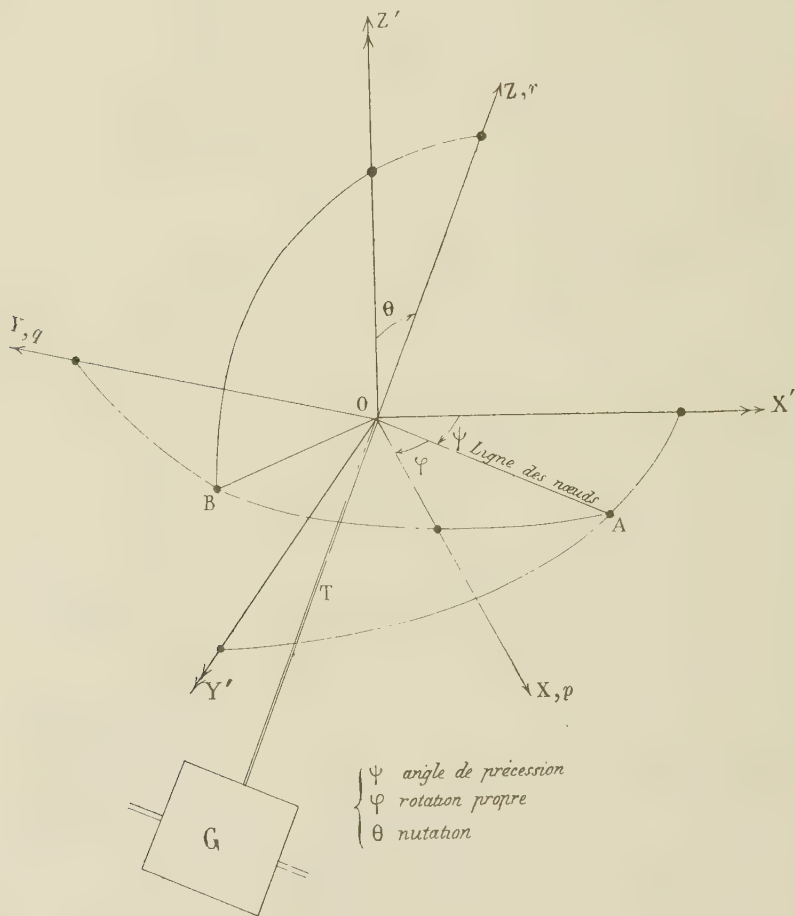


Fig. 4.

L'axe instantané de rotation et la vitesse autour de cet axe s'obtiennent en composant les vecteurs p , q , r .

§ 8. — Cas particulier du compas gyroscopique. — Les définitions qui précèdent sont absolument générales. Mais, du fait que

le corps constitue un compas gyroscopique, nous pouvons faire, dès maintenant, quelques remarques qui amèneront une grande simplification dans la suite des calculs :

1° — La nutation θ se trouve toujours sensiblement dans le plan xOz (1).

Nous admettrons donc que le plan xOz contient Oz' .

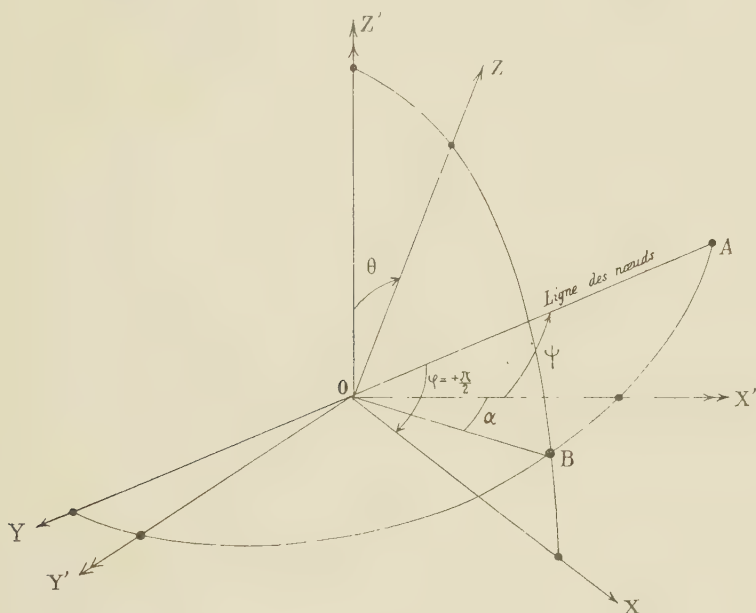


Fig. 5.

Il en résulte que Oy devient la ligne des nœuds, la direction OA étant opposée à Oy . Oy devient, en effet, perpendiculaire à Oz' et, par suite, est contenu à la fois dans les plans xOy et $x'Oy'$. On a :

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}.$$

La rotation propre est constante et égale à $+\frac{\pi}{2}$.

Le système des axes devient le suivant (fig. 5).

(1) Voir, au sujet de la valeur de l'angle φ , rotation propre, la note page 65 et suivantes.

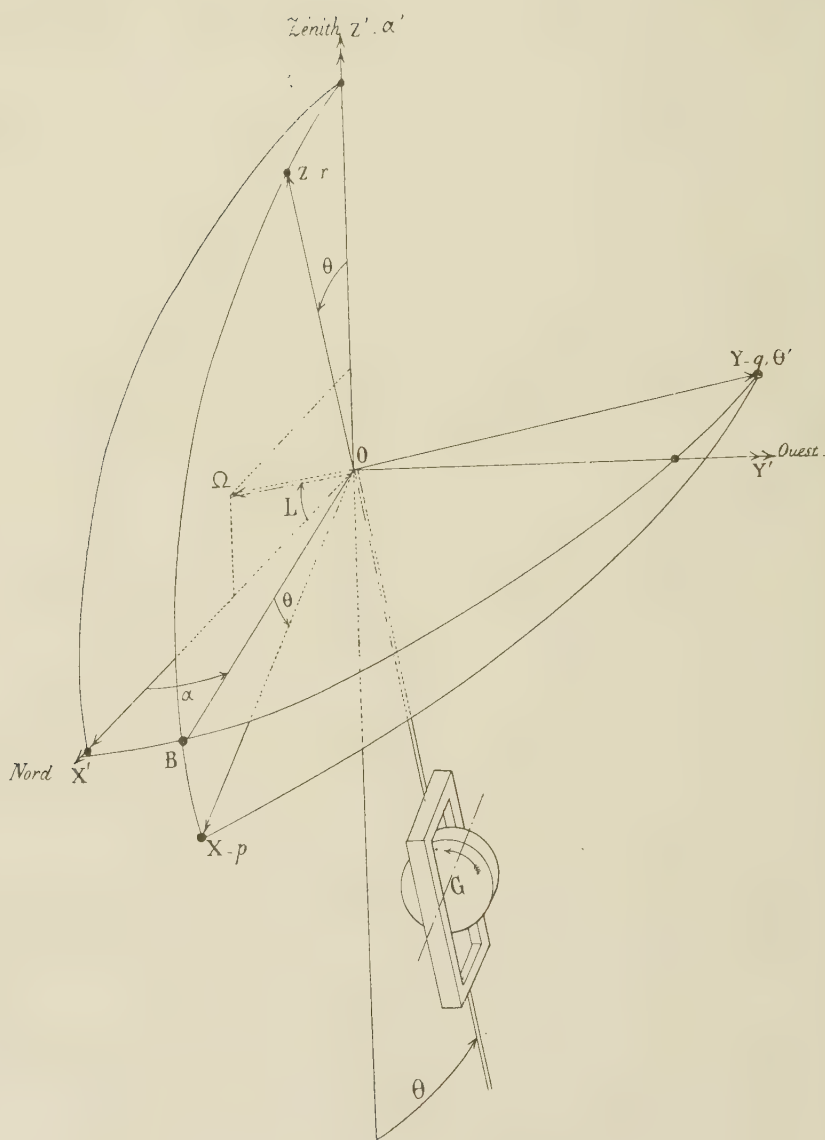


Fig. 6.

2° — Dans ces conditions, il devient logique de prendre un système d'axes à droite, en reportant le sens positif de Oy sur OA . De plus, le sens des équations sera plus clair si, au lieu de l'angle ψ , nous adoptons comme coordonnée de direction l'angle α que le plan $z'Ox$ fait avec le plan $z'Ox'$.

§ 9. — **Définition des coordonnées.** — Nous adopterons donc le système suivant de coordonnées (*fig. 6*).

1° — O est le point fixe de l'appareil.

Ox , Oy , Oz sont les trois axes principaux d'inertie de l'appareil pour le point O .

Oz est dirigé suivant la ligne joignant le centre de gravité au point de suspension. Les z sont comptés positifs vers le haut.

Ox est parallèle à l'axe de rotation du tore.

Oy est normal en O au plan xOz .

Ox , Oy , Oz forment un système d'axes à droite.

2° — Pour définir la position du corps, nous rapportons les axes Ox , Oy , Oz , liés au corps, et, par conséquent, mobiles, à trois axes rectangulaires fixes sur la terre Ox' , Oy' , Oz' .

Oz' est vertical, les z' sont comptés positifs vers le zénith.

Ox' est dans le plan méridien, les x' sont comptés positifs vers le Nord.

Oy' est perpendiculaire au plan $z'Ox'$, les y' sont comptés positifs vers l'Ouest.

Le système est à droite.

3° — Oz est toujours contenu dans le plan $z'Ox$.

La ligne des nœuds, intersection des plans xOy et $x'Oy'$, est Oy .

4° — Nous utiliserons les coordonnées de direction α et θ .

α est l'angle que le plan $z'Ox$ fait avec le plan $z'Ox'$: c'est la précession.

θ est l'angle, toujours situé dans le plan $z'Ox$, que l'axe Oz fait avec l'axe Oz' : θ est la nutation.

5° — Toutes les rotations en sens inverse des aiguilles d'une montre sont positives et, par extension, tous les angles résultant d'une rotation positive sont positifs.

Sur la figure, les angles α et θ sont positifs.

§ 10. — **Expressions de p, q, r .** — Nous rappelons que p, q, r sont les vitesses de rotation instantanées autour des axes mobiles.

Il ne faut pas oublier que le point O, étant fixe sur la terre, participe à son mouvement de rotation et, par suite, que dans l'expression de p, q, r il faut faire entrer l'expression de la rotation terrestre, soient $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$.

Ω est représenté par un vecteur *positif* situé dans le plan $x'Oz'$ et faisant avec Ox' un angle L égal à la latitude du lieu. Il résulte de nos conventions que L est négatif si la latitude est Nord, positif si la latitude est Sud.

On voit que :

$$\begin{aligned}\Omega_x &= +\Omega \cos L \cos \alpha \cos \theta + \Omega \sin L \sin \theta, \\ \Omega_y &= -\Omega \cos L \sin \alpha, \\ \Omega_z &= +\Omega \cos L \cos \alpha \sin \theta - \Omega \sin L \cos \theta.\end{aligned}$$

Il est beaucoup plus commode de discuter le problème sur les coordonnées θ et α dont nous désignerons les dérivées par rapport au temps par les symboles θ' et α' . θ' est dirigé suivant Oy , et α' est dirigé suivant Oz' .

Les expressions de p, q, r sont donc :

$$\begin{aligned}p &= \Omega_x - \alpha' \sin \theta, \\ q &= \Omega_y + \theta', \\ r &= \Omega_z + \alpha' \cos \theta.\end{aligned}$$

§ 11. — **Équations d'Euler.** — Les équations générales du mouvement d'un corps autour d'un point fixe, dites Équations d'Euler, s'interprètent en disant que :

Le vecteur qui représente la vitesse absolue de l'extrémité du moment angulaire, est identique au vecteur qui représente le couple appliqué au même instant.

Nous les mettrons donc sous la forme suivante, plus commode pour nos calculs que la forme classique.

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \mathfrak{L}q - \mathfrak{M}r &= \mathfrak{X}, \\ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \mathfrak{M}r - \mathfrak{N}p &= \mathfrak{Y}, \\ \frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \mathfrak{N}p - \mathfrak{L}q &= \mathfrak{Z}. \end{aligned} \right.$$

$\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$ sont les composantes du vecteur figurant le moment angulaire que l'on appelle encore moment des quantités de mouvement ou moment of momentum, suivant la terminologie anglaise.

p , q , r , sont les vitesses de rotation instantanées autour des axes mobiles. Nous avons donné au § 10 les expressions de p , q , r .

$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont les composantes du vecteur représentant le couple appliqué au même instant.

Nous allons chercher les expressions de ces quantités en fonction des données du problème.

§ 12. — **Expressions de $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$.** — On sait que le moment angulaire d'un corps tournant autour d'un axe, par rapport à cet axe, est égal au produit du moment d'inertie du corps par rapport à cet axe par la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe.

Les expressions de $\mathfrak{B}$ et $\mathcal{C}$ sont donc évidemment :

$$\mathfrak{B} = Bq \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = Cr.$$

B et C sont respectivement les moments d'inertie de l'appareil par rapport aux axes Oy et Oz .

q et r les vitesses de rotation instantanées autour de ces mêmes axes.

L'expression de $\mathcal{A}$ est un peu plus délicate à trouver, car dans $\mathcal{A}$ rentre le moment de la quantité de mouvement du tore tournant autour de son axe.

En appliquant le théorème des aires (Voir à ce sujet le § 30), on voit que l'expression de $\mathcal{A}$ est égale à :

$$Ap + \mathfrak{J}\omega.$$

A est le moment d'inertie de *l'ensemble de l'appareil* (gyroscope, tige et rose) par rapport à l'axe Ox .

$\mathfrak{J}$ est le moment d'inertie du tore par rapport à son axe.

p est la vitesse angulaire de rotation de *l'ensemble de l'appareil* autour de Ox .

ω est la vitesse angulaire de rotation du tore autour de son axe : nous supposons ω constant.

ω étant incomparablement plus grand que p , alors que $\mathfrak{J}$ et A sont

à peu près du même ordre de grandeur, on peut négliger Ap devant $\mathfrak{J}\omega$ et écrire :

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{J}\omega.$$

Il résulte des valeurs trouvées pour $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ que :

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{B} \frac{dq}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \mathfrak{C} \frac{dr}{dt}.$$

Mais il serait inexact de poser $\frac{d\mathfrak{A}_0}{dt} = 0$ bien que l'on ait posé :

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{J}\omega = \text{constante.}$$

Nous venons en effet de voir que :

$$\mathfrak{A}_0 = Ap + \mathfrak{J}\omega.$$

La dérivée est donc :

$$\frac{d\mathfrak{A}_0}{dt} = A \frac{dp}{dt}$$

qui n'est pas nulle.

§ 13. — **Expressions de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.** — Le seul couple appliqué à l'appareil est celui dû à la pesanteur. Si l'on se rappelle (§ 8) que le plan vertical passant par l'axe de rotation du tore, plan xOz' , est un plan de symétrie de l'appareil, on a évidemment :

$$\mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{M} = -Mga \sin \theta, \quad \mathcal{N} = 0.$$

M est la masse de l'ensemble de l'appareil.

$g = 981$, la constante de la pesanteur.

a la distance du centre de gravité au point de suspension.

§ 14. — **Équations générales du mouvement du compas gyroscopique.** — En remplaçant dans les équations (1) $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, p, q, r, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$, par leur valeur, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} A(\Omega_x - \alpha' \sin \theta)' + C(\Omega_z + \alpha' \cos \theta)(\Omega_y + \theta') - B(\Omega_y + \theta')(\Omega_z + \alpha' \cos \theta) &= 0, \\ B(\Omega_y + \theta')' + \mathfrak{J}\omega(\Omega_x + \alpha' \cos \theta) - C(\Omega_x + \alpha' \cos \theta)(\Omega_x - \alpha' \sin \theta) \\ &= -Mga \sin \theta, \\ C(\Omega_x + \alpha' \cos \theta)' + B(\Omega_y + \theta')(\Omega_x - \alpha' \sin \theta) - \mathfrak{J}\omega(\Omega_y + \theta') &= 0. \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport au temps des expressions $(\Omega_x - \alpha' \sin \theta)$, $(\Omega_y + \theta')$ et $(\Omega_z + \alpha' \cos \theta)$ sont représentées symboliquement par les expressions $(\Omega_x - \alpha' \sin \theta)'$, $(\Omega_y + \theta)'$ et $(\Omega_z + \alpha' \cos \theta)'$.

1° — Les valeurs des vitesses angulaires Ω , θ' , α' étant très faibles, nous négligerons leurs produits deux à deux ou leurs carrés ;

2° — L'angle θ est toujours très petit, de sorte que, finalement, les équations du mouvement se réduisent au système suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} B\theta'' + \delta\omega(\Omega_z + \alpha') + Mga\theta = 0, \\ C\alpha'' - \delta\omega(\Omega_y + \theta') = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent tous les éléments du mouvement.

Les simplifications 1° et 2° dominent tous les calculs suivants. Nous les indiquons une fois pour toutes, mais il faudra toujours les avoir présentes à l'esprit pour comprendre la suite des calculs.

§ 15. — **Mouvement oscillatoire du compas gyroscopique autour du méridien : mouvement dit de précession.** — Nous voulons connaître la loi de α .

L'accélération angulaire θ'' étant très petite, en dérivant la première équation (2) par rapport au temps, on obtient :

$$\delta\omega\alpha'' + Mga\theta' = 0.$$

En portant la valeur de θ' tirée de cette relation dans la seconde équation (2), il vient :

$$\alpha'' \left(C + \frac{\delta^2 \omega^2}{Mga} \right) - \delta\omega\Omega_y = 0,$$

ou

$$\alpha'' \left(C + \frac{\delta^2 \omega^2}{Mga} \right) + \delta\omega\Omega \cos L \sin \alpha = 0.$$

Pour des angles α petits, on pourra écrire :

$$(3) \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \left(C + \frac{\delta^2 \omega^2}{Mga} \right) + \delta\omega\Omega \cos L \cdot \alpha = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît l'équation classique des mouvements oscillatoires non amortis.

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + K\alpha = 0.$$

L'intégrale générale est :

$$\alpha = M e^{+ \rho_1 t} + N e^{+ \rho_2 t}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les racines de l'équation

$$I \rho^2 + K = 0,$$

I et K étant essentiellement positifs, si on pose :

$$R = \sqrt{\frac{K}{I}},$$

on a :

$$\rho = \pm i R.$$

On peut alors faire la suite des transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= M e^{i R t} + N e^{-i R t}, \\ \alpha &= (M + N) \cos R t + i (M - N) \sin R t, \\ \alpha &= U \cos R t + V \sin R t. \end{aligned}$$

En posant :

$$U = (M + N), \quad V = [i(M - N)],$$

ou, enfin :

$$\alpha = \lambda \sin (R t - \mu)$$

α est une fonction sinusoïdale du temps ; les deux constantes λ et μ seront déterminées par les conditions initiales, c'est-à-dire par les valeurs pour $t = 0$ de α et $\frac{d\alpha}{dt} (\alpha')$.

Calculons la vitesse angulaire

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lambda R \cos (R t - \mu).$$

Cherchons le temps T, à partir de l'instant t , au bout duquel le système mobile repassera au point où il est à cet instant t avec une vitesse égale et de même sens ; il faut évidemment :

$$\begin{aligned} \lambda \sin (R t - \mu) &= \lambda \sin [R (t + T) - \mu], \\ \lambda R \cos (R t - \mu) &= \lambda R \cos [R (t + T) - \mu]. \end{aligned}$$

Les deux arcs, devant avoir même sinus et même cosinus, diffèrent d'un multiple de 2π . Donc :

$$R T = 2n\pi.$$

On a ainsi une infinité de solutions et le temps minimum au bout duquel se produira le premier retour du mobile à la position de l'instant t dans les mêmes conditions sera :

$$T = \frac{2\pi}{R},$$

T est la période d'oscillation du mouvement.

En particulier, si on prend $t = 0$ de façon que $\alpha = 0$, la solution générale de l'équation différentielle sera de la forme :

$$\alpha = \alpha_0 \sin R t,$$

α_0 étant la valeur maxima de α .

Le mouvement oscillatoire du compas gyroscopique autour du méridien est donc entièrement déterminé par le système suivant :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 \sin R t, \quad \text{avec} \quad R = + \sqrt{\frac{\Omega \cos L}{\frac{\beta \omega}{Mga} + \frac{C}{\beta \omega}}}, \\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega \cos L}} \sqrt{\frac{\beta \omega}{Mga} + \frac{C}{\beta \omega}}, \\ K_z = -\beta \omega \Omega \cos L. \alpha. \end{array} \right.$$

α est à chaque instant l'écart du plan $z'Ox$ au plan $z'Ox'$.

T est la période du mouvement oscillatoire de α .

K_z est le couple directeur, c'est-à-dire le couple qui oriente l'axe du tore vers le plan méridien. Le signe — indique que le mouvement est dirigé vers les α décroissants.

Le système (4) est identique au système donné au § 5, car l'appareil du § 5 a une stabilité absolue dans tous les plans verticaux passant par l'axe zz . Dans cet appareil, on aurait donc a infiniment grand. En d'autres termes, l'appareil du § 5 et l'appareil du § 6 ont un mouvement comparable : la modification apportée à l'appareil du § 5 augmente simplement le moment d'inertie autour de Oz de la quantité :

$$\frac{\beta^2 \omega^2}{Mga}.$$

§ 16. — Discussion.

1° — R . On voit que l'expression de R n'est réelle que si ω et Ω

sont de même signe. Le mouvement oscillatoire de précession de l'axe dirigé $\overrightarrow{Ox}$ ne peut donc avoir lieu qu'autour de l'axe dirigé $\overrightarrow{Ox'}$, de façon que les rotations ω et Ω soient respectivement de même signe par rapport à ces axes dirigés.

En d'autres termes, *l'axe du tore tend à se placer dans le plan méridien de telle façon que les rotations du tore et de la terre soient de même sens. L'axe du tore présente donc un pôle Nord et un pôle Sud, tout comme l'aiguille aimantée.*

2° — *Couple directeur.* Dans un appareil donné, le couple directeur ne dépend que du nombre de tours du tore et de la valeur de son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. Il est directement proportionnel à chacune de ces quantités. Mais le couple directeur est indépendant de la distance du centre de gravité au point de suspension et du poids total du compas gyroscopique. Enfin, le couple directeur varie comme le cosinus de la latitude.

3° — *Période.* La formule donnant la période se prête à une discussion des plus intéressantes, car en un lieu donné de la terre, la valeur du couple directeur y entre avec le facteur γ .

Lorsque a a une valeur infiniment grande, $\frac{\gamma \omega}{Mga}$ est très petit devant $\frac{C}{\gamma \omega}$: la période est, dans ce cas, inversement proportionnelle à la racine carrée du couple directeur (voir à ce sujet les formules du § 5).

Au contraire, si a a une valeur très faible, $\frac{\gamma \omega}{Mga}$ devient grand devant $\frac{C}{\gamma \omega}$: la période est alors proportionnelle à la racine carrée du couple directeur.

Le produit :

$$\frac{\gamma \omega}{Mga} \times \frac{C}{\gamma \omega} = \frac{C}{Mga}$$

étant constant pour un appareil donné, le minimum de la période sera atteint pour :

$$\frac{\gamma \omega}{Mga} = \frac{C}{\gamma \omega}.$$

En pratique, pour vaincre les frottements inévitables de la suspension, et donner, par suite, à la rose une grande stabilité vers le

Nord, malgré les évolutions du navire, on est amené à avoir un couple directeur aussi grand que possible. D'autre part, par construction, C est toujours très petit devant $\delta\omega$, il ne sera donc généralement pas possible de faire Mga assez grand pour que l'égalité soit satisfaite.

Dans la pratique, $\frac{\delta\omega}{Mga}$ est toujours supérieur à $\frac{C}{\delta\omega}$.

Conclusion. — Dans les appareils courants, la période augmente sensiblement comme la racine carrée du nombre de tours du tore. On voit donc combien on raisonnerait faussement si on interprétait le mouvement du compas gyroscopique sur les formules du § 5.

Nous rappelons que, dans les compas magnétiques, la période est inversement proportionnelle à la racine carrée de la force directrice

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\partial K H}}$$

et qu'elle a généralement une valeur de l'ordre de 15 secondes.

Théoriquement, rien n'empêche qu'un compas gyroscopique n'ait une période rigoureusement comparable à celle d'un compas magnétique. Mais, pratiquement, par suite de son poids forcément très élevé par rapport au poids d'une rose Thomson, les frottements, dans un compas gyroscopique, sont très supérieurs à ceux d'une bonne rose magnétique; nous sommes donc amenés à obtenir des périodes d'une valeur beaucoup plus considérable comme conséquence de l'augmentation inévitable du couple directeur.

D'ailleurs, ceci ne constitue pas un défaut pour l'appareil; nous verrons plus loin que l'on est amené à obtenir des périodes encore beaucoup plus grandes, de l'ordre de la demi-heure, et même de l'heure. Le seul inconvénient qui en résulte est l'obligation de ancrer le compas un temps appréciable avant le moment où l'on doit utiliser ses indications.

Pour terminer cette discussion, nous ferons remarquer que la période est fonction inverse de la latitude.

§ 17. — **Mouvement oscillatoire du compas gyroscopique dans le plan vertical passant par l'axe de rotation du tore : mouvement dit de nutation.** — Nous cherchons à obtenir la loi de θ .

L'accélération angulaire θ'' étant très petite, on obtient avec la première équation du système (2):

$$\theta = -\frac{J\omega}{Mga}(\Omega_z + \alpha').$$

Or, d'après le système (4)

$$\alpha' = \alpha_0 R \cos R t.$$

Finalement :

$$(5) \quad \theta = -\frac{J\omega}{Mga}(\alpha_0 R \cos R t - \Omega \sin L).$$

Le mouvement de nutation du compas gyroscopique est un mouvement sinusoïdal de même période que le mouvement de précession, mais il est en quadrature dans le temps avec lui. Il est d'ailleurs également en quadrature dans l'espace, comme nous l'avons vu au § 8.

Nous discuterons plus loin l'expression de θ (Voir § 21).

§ 18. — **Mouvement général du centre de gravité du compas gyroscopique.** — Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de déterminer la trajectoire du centre de gravité du compas gyroscopique sur le plan horizontal $x'Oy'$, les axes de référence étant Ox' et Oy' .

1° — Avant d'aborder le problème lorsque l'appareil se trouve sous une latitude quelconque, nous nous supposerons d'abord à l'Équateur, car alors l'expression (5) de θ se simplifie et devient :

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -\frac{J\omega}{Mga} \times \alpha_0 R \cos R t. \\ \text{Nous rappelons que l'on a :} \\ \alpha &= \alpha_0 \sin R t. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Les mouvements α et θ sont en quadrature à la fois dans l'espace et dans le temps.

L'élimination de t , entre ces deux équations, donne :

$$\theta^2 = \alpha_0^2 \times \frac{J^2 \omega^2 R^2}{M^2 g^2 a^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2}\right).$$

Si on ne considère que le cas de l'angle α petit, on reconnaît sous cette forme l'équation générale, en coordonnées polaires, des lemniscates :

$$\rho^2 = 2a \cos b\omega,$$

où $\cos b\omega$ serait développé en série.

La trajectoire du centre de gravité du compas gyroscopique sur le plan horizontal $x'Oy'$ a donc — dans le cas où $L = 0$ — l'allure suivante (fig. 7).

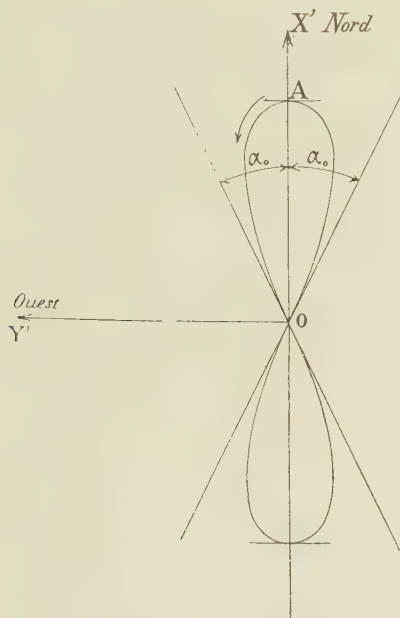


Fig. 7.

L'origine O est un point double d'inflexion, les tangentes à l'origine font avec l'axe Ox' l'angle α_0 .

La longueur du grand axe de la lemniscate est :

$$2\alpha_0 \times \frac{\gamma \omega R}{Mga} = 2\alpha_0 \times \frac{\gamma \omega}{Mga} \times \frac{2\pi}{T}.$$

La longueur du grand axe est fonction directe de la force directrice, et fonction inverse de la période.

Le rapport du grand axe de la lemniscate à l'angle des tangentes à l'origine est constant pour une latitude donnée :

$$\frac{2\alpha_0 \delta \omega R}{Mga} \cdot \frac{1}{2\alpha_0} = \frac{\delta \omega R}{Mga}.$$

Ce rapport est maximum à l'Équateur.

Le sens dans lequel est décrit la courbe est facile à déterminer.

Nous rappelons que les droites faisant un angle α positif avec Ox' , sont dirigées Nord-Ouest—Sud-Est. θ est positif lorsque Oz est situé au Nord de Oz' . Lorsque t croît de 0 à $\frac{T}{4}$, α est positif et croît, θ est négatif et décroît en valeur absolue (6). Le point figuratif de la trajectoire du centre de gravité part donc de A et décrit le huit dans le sens de la flèche.

2° — Lorsque l'appareil est situé à une latitude quelconque, l'allure générale de la courbe est un peu modifiée. D'abord, il y a un petit crochet aux environs de l'origine.

En effet, θ ne s'annule plus pour $t = \frac{T}{4}$, c'est-à-dire pour $\alpha = \alpha_0$; d'après l'équation (5), θ s'annule pour une valeur t_1 telle que :

$$\alpha_0 R \cos Rt_1 = \Omega \sin L.$$

Pour une latitude Nord, $\Omega \sin L$ est une quantité négative, donc on a

$$\cos Rt_1 < 0, \quad \frac{T}{4} < t_1 < \frac{3T}{4}.$$

La droite, faisant avec l'origine un angle α_0 , est toujours une tangente, puisque α_0 est le maximum de l'écart avec le méridien, mais la tangente à l'origine fait avec Ox' l'angle α_1 déterminé par la relation :

$$\alpha_1 = \alpha_0 \sin Rt_1,$$

où

$$\frac{T}{4} < t_1 < \frac{3T}{4}.$$

De plus, si la longueur totale du grand axe n'a pas changé, les demi-axes ne sont plus égaux, car, en un lieu donné, la quantité $\Omega \sin L$ garde un signe constant et, par conséquent, tantôt s'ajoute arithmétiquement à $\alpha_0 R \cos Rt$, et tantôt s'en retranche.

L'allure générale de la courbe est donc celle de la figure 8, à condition toutefois que la valeur absolue de $\alpha_0 R$ soit toujours supérieure à la valeur absolue de $\Omega \sin L$, ce qui a toujours lieu dans les appareils courants. Sinon, la courbe présente un aspect tout différent.

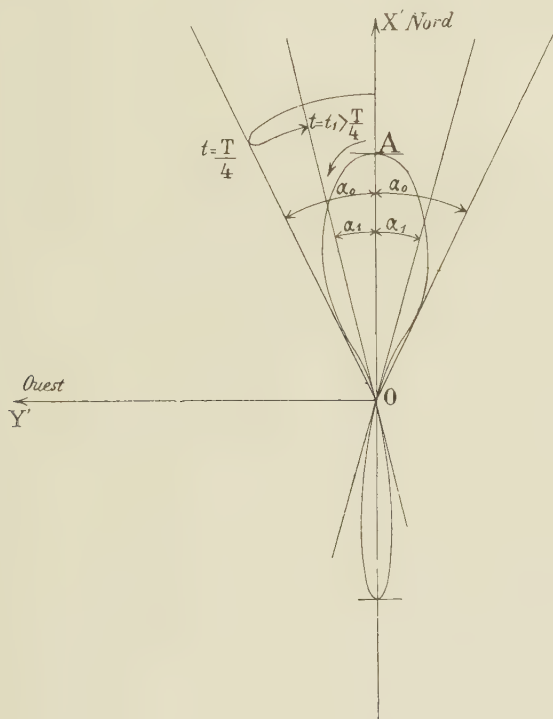


Fig. 8.

Remarque. — Le point de contact de la courbe avec la tangente caractérisée par l'angle α_0 se trouve sur cette tangente à une distance de l'origine donnée par la relation :

$$\theta = \frac{3\omega\Omega \sin L}{Mg\eta}.$$

Ω étant très petit, la valeur de θ est très faible et pratiquement, à toutes latitudes, la courbe pourra être confondue avec le huit parfait obtenu à l'équateur.

§ 19. — **Résumé du chapitre I^{er}.** — Le mouvement de l'appareil décrit au § 6 résulte de la composition de deux mouvements sinusoïdaux, en quadrature à la fois dans l'espace et dans le temps.

Un premier mouvement étant un mouvement oscillatoire, autour du plan méridien, du plan vertical passant par l'axe du tore.

Un second mouvement étant un mouvement pendulaire dans le plan vertical passant par l'axe du tore.

CHAPITRE II.

Étude de la position d'équilibre d'un compas gyroscopique, à bord d'un navire au repos.

§ 20. — **Étude de la position d'équilibre du compas gyroscopique.** — Toutes les considérations qui précèdent font pressentir la position d'équilibre, mais il est plus rigoureux d'y arriver par le calcul, ce qui est d'ailleurs fort simple.

Puisque l'appareil est dans sa position d'équilibre, les angles θ et α sont constants, nous aurons les nouvelles équations (2) suivantes :

$$\begin{cases} \mathfrak{J} \omega \Omega_x + Mga \sin \theta = 0 \\ \mathfrak{J} \omega \Omega_y = 0, \end{cases}$$

ou :

$$(7) \quad \begin{cases} -\mathfrak{J} \omega \Omega \sin L \cos \theta + \mathfrak{J} \omega \Omega \cos L \cos \alpha \sin \theta + Mga \sin \theta = 0 \\ + \mathfrak{J} \omega \Omega \cos L \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

La seconde de ces équations ne peut être satisfaite que pour :

$$\sin \alpha = 0,$$

d'où (d'après 1^o -- § 16) :

$$\alpha = 0.$$

Et :

$$(8) \quad \tan \theta = \frac{\mathfrak{J} \omega \Omega \sin L}{Mga + \mathfrak{J} \omega \Omega \cos L}.$$

§ 21. — Discussion.

1^o — $\alpha = 0$. Dans la position d'équilibre, l'axe de rotation du tore se trouve placé dans le plan du méridien de telle façon que les rotations du tore et de la terre soient de même sens,

$$2^{\circ} \text{ — } \tan \theta = \frac{\mathfrak{J} \omega \Omega \sin L}{Mga + \mathfrak{J} \omega \Omega \cos L}.$$

I. Il résulte de cette expression que l'appareil admet deux positions d'équilibre, diamétralement opposées l'une à l'autre, comme répondant à une même valeur de $\tan \theta$.

L'une de ces positions donne l'équilibre stable et l'autre l'équilibre instable. La distinction est évidente : dans la position d'équilibre stable, l'appareil fait un angle θ aigu avec la verticale. On imagine en effet difficilement l'appareil se renversant de façon que le gyroscope proprement dit se trouve au-dessus du point de suspension. Il suffit d'ailleurs d'invoquer le Théorème général de la statique.

Le calcul confirme facilement ce raisonnement de simple bon sens.

La position d'équilibre stable de θ doit évidemment correspondre à la position d'équilibre stable de α . Or, la position d'équilibre stable de α implique que l'axe dirigé $\overrightarrow{Ox}$ coïncide avec l'axe dirigé $\overrightarrow{Ox'}$ (voir § 16, 1°). Si θ faisait avec la verticale un angle obtus, l'axe dirigé $\overrightarrow{Ox}$ coïnciderait avec l'axe dirigé $(-\overrightarrow{Ox'})$ qui donne une position d'équilibre instable de α .

On a donc bien, en valeur absolue :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

II. Le signe de θ dépend uniquement du signe du numérateur, puisque le dénominateur est toujours positif.

Dans l'hémisphère Sud, on a donc :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Dans l'hémisphère Nord, on aurait :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0.$$

Il résulte de toutes ces considérations que le compas gyroscopique possède véritablement, tout comme la rose magnétique, un pôle Nord et un pôle Sud.

a) ω variant de 0 à des valeurs croissant au delà de toutes limites, la valeur absolue de θ varie de 0 à L.

En d'autres termes, l'appareil étant en équilibre dans le plan

méridien, le pôle Nord de l'axe du tore, dans l'hémisphère Nord, s'élèvera au-dessus du plan horizontal d'un angle variant entre zéro et la latitude du lieu suivant la grandeur de la vitesse de rotation du tore.

Dans l'hémisphère Sud, le pôle Nord de l'axe piquera du nez.

b) Le tore ne tournant pas, $\omega = 0$, l'appareil se tient vertical, ceci est évident.

c) A l'équateur $L = 0$, l'appareil se tient vertical.

d) α variant de 0 à des valeurs croissant au delà de toutes limites, la valeur absolue de θ varie de L à 0.

Ce sont des conclusions analogues à celles données en *a*).

Le cas particulier de $\alpha = 0$, c'est-à-dire le cas où l'appareil est suspendu autour de son centre de gravité, et le cas particulier de α infiniment grand (qui est le cas du § 5) correspondent aux cas des expériences de Foucault, et les résultats de nos calculs confirment les résultats obtenus par l'expérience.

e) Pratiquement, l'expression $\beta \omega \Omega \cos L$ est toujours très petite devant Mga et l'on peut poser :

$$\theta = \frac{\beta \omega \Omega}{Mga} \sin L.$$

Cette expression est bien celle que nous avons trouvée au § 17 dans le cas où $\cos R t = 0$.

Elle montre qu'il est parfaitement licite de supposer θ petit dans tous les calculs, car, dans les appareils construits, Mga est toujours très grand devant $\beta \omega \Omega \sin L$.

De plus, on voit que, pratiquement, la valeur absolue de l'angle θ croît avec la latitude.

§ 22. — **Résumé du chapitre II.** — La position d'équilibre de l'appareil décrit au § 6 est telle que :

L'axe du tore est orienté dans le plan du méridien de façon que les rotations du tore et de la terre soient de même sens;

La tige T fait avec la verticale un angle généralement petit et croissant avec la latitude, la tige T étant au Nord de la verticale dans l'hémisphère Nord, au Sud dans l'hémisphère Sud.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DE LA POSITION D'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DU COMPAS GYROSCOPIQUE, SUPPOSÉ EN ÉQUILIBRE DANS LE PLAN MÉRIDIEN, A BORD D'UN NAVIRE EN MARCHÉ.

CHAPITRE PREMIER.

Déviatiou permanente.

(Variation.)

§ 23. — Déviatiou permanente du compas gyroscopique à bord d'un navire non oscillant et conservant une route et une vitesse constantes. — Du fait qu'il se trouve à bord d'un navire non oscillant, courant à une vitesse constante sur une route fixe, l'appareil possède une déviatiou.

Cela revient, en effet, à dire que le point O est mobile sur la terre et sa vitesse linéaire sur le globe peut se traduire par une rotation ρ qui vient s'ajouter algébriquement à la rotation Ω ; ρ_x , ρ_y , et ρ_z sont les vitesses de rotations instantanées qui en résultent autour de Ox , Oy , Oz .

Mais il convient de remarquer que la rotation ρ est la résultante de deux rotations instantanées :

$$\begin{array}{ll} \rho \cos R_v & \text{le long d'un méridien,} \\ \rho \sin R_v & \text{le long d'un parallèle.} \end{array}$$

R_v étant l'angle de la route avec le méridien, angle compté à la façon ordinaire de 0° à 360° dans le sens positif des rotations.

La rotation $\rho \sin R_v$ s'ajoute algébriquement à la rotation Ω de la terre et a pour seul effet d'augmenter ou de diminuer, selon son signe, le couple directeur K_z . En aucun cas, elle n'a un effet perturbateur sur l'équilibre du compas gyroscopique.

Nous ne considérerons donc que la rotation $\rho \cos R_v$.

Cette rotation sera représentée par un vecteur positif situé le long de Oy' et dont la grandeur et le sens dépendent de la valeur de R_v .

Les équations (7) donnant la position d'équilibre de l'appareil deviendront :

$$(9) \quad \begin{cases} 3\omega(\Omega_z + \rho_z) + Mga \sin \theta = 0 \\ 3\omega(\Omega_y + \rho_y) = 0. \end{cases}$$

Or, on a :

$$\rho_y = +\rho \cos R_v \cos \alpha,$$

Dans les circonstances actuelles, lorsque l'appareil est dans sa position d'équilibre, l'axe du tore n'est plus dans le plan du méridien, mais il fait avec lui un angle α déterminé par la seconde des équations (9).

Par analogie avec les notations employées avec les compas magnétiques, nous appellerons *variation* cet angle, et nous le désignerons par W .

$$-\Omega \cos L \sin W + \rho \cos R_v \cos W = 0.$$

D'où

$$\tan W = + \frac{\rho \cos R_v}{\Omega \cos L}.$$

Nous mettrons cette relation sous la forme suivante, plus commode pour la pratique.

Si r est le rayon de la terre supposée sphérique, et si v est la vitesse en nœuds du bâtiment, on a :

$$\rho \cos R_v = \frac{v \cos R_v}{r},$$

et

$$\Omega = \frac{900}{r}.$$

v a le signe de ρ . Comme W est toujours très petit, on posera

$$(10) \quad W = + \frac{v \cos R_v}{900 \cos L}.$$

Rappelons que R_v est compté positif dans le sens Nord-Ouest $\xrightarrow{\quad}$ Sud-Est. Toute la discussion de W peut donc se réduire à la règle pratique suivante :

Si la route est « Nord », la variation W sera « Ouest » ; si la route est « Sud », la variation sera « Est », R_v étant compté, comme il est d'usage, de 0° à 90° vers l'Est ou vers l'Ouest en partant du méridien.

Il est intéressant de remarquer que la correction est la même, en grandeur et en signe, que la route soit à l'Est ou à l'Ouest du méridien : elle ne dépend que du sens de la composante de la route sur ce méridien.

On trouvera, à la fin du mémoire, une table donnant les valeurs en degré de $\frac{\cos R_v}{900 \cos L}$ pour les latitudes usuelles et les routes de dix degrés en dix degrés.

CHAPITRE II.

Déviations balistiques.

§ 24. — **Position du problème.** — Ce n'est qu'exceptionnellement qu'un navire en marche ne roule ni ne tangue. De plus, surtout dans la marine de guerre, pendant la navigation d'escadre, les navires sont amenés à changer de vitesse et de route.

Les accélérations de ces divers mouvements, roulis, tangage, variations de vitesse, girations, donnent naissance à des forces qui se traduisent généralement, pour le compas gyroscopique, par un couple perturbateur, puisque le centre de gravité ne coïncide pas avec le point de suspension.

Si le compas est dans sa position d'équilibre, il en sera donc dérangé brusquement, puisque la cause perturbatrice s'établit brusquement ; puis, la cause cessant, le compas reprendra sa nouvelle position d'équilibre pour la route et la vitesse nouvelles. La déviation est balistique : le départ de la position primitive d'équilibre a lieu avec une certaine vitesse qui donne naissance à une élongation maxima que nous nous proposons de calculer.

Ces élongations atteignent une valeur beaucoup plus élevée que la déviation permanente. On ne peut malheureusement pas en tenir compte dans la navigation, puisque, par son origine même, ce genre de déviation est à chaque instant variable, mais leur étude est des plus intéressantes, car leur discussion permet de fixer la grandeur

que l'on doit attribuer dans la construction à certaines constantes du compas gyroscopique, notamment la période.

Cette étude est très délicate, mais il suffit d'en faire la recherche dans des cas particuliers, en choisissant de préférence le cas le plus défavorable, afin d'avoir une limite supérieure de la déviation. Cela est, d'ailleurs, sans aucun inconvénient, étant donnée l'impossibilité de corriger la route d'une déviation à chaque instant variable : il suffit, en effet, de connaître l'ordre de grandeur de l'erreur commise.

Naturellement, nous ne compliquerons pas notre exposé en étudiant la perturbation balistique que ces différentes causes amènent sur l'angle θ . En pratique, les variations de θ sont très petites et, d'ailleurs, l'angle α , seul, intéresse le navigateur.

§ 25. — **Déviation balistique due aux changements de vitesse d'un bâtiment suivant une route fixe.** — Tant que la vitesse du navire est constante, l'accélération du mouvement est nulle, et le compas ne possède que la variation W signalée au § 23, si le navire sans roulis ni tangage fait route au cap R_v . Nous allons négliger W pour le moment.

Seule produit une déviation de la rose la composante de l'accélération située dans le plan $z'Ox$, et nous rappelons que ce plan fera avec le longitudinal du navire un angle égal à R_v .

Le navire augmente brusquement de vitesse. Par inertie, le compas va être rejeté brusquement en arrière du mouvement. En d'autres termes, l'accélération j du mouvement se traduit par un couple perturbateur $Mja \cos \theta \times \cos R_v$ qui tend à faire pivoter l'appareil autour de Oy , et dont l'effet vient s'ajouter au couple $-Mga \sin \theta$, de telle façon que, dans les équations d'Euler, il faut poser :

$$\mathfrak{M} = -Mga \sin \theta + Mja \cos \theta \cos R_v.$$

La première des équations (2) donne :

$$\delta \omega (\Omega_z + \alpha') + Mga \theta - Mja \cos R_v = 0.$$

Les conditions au temps $t = 0$ deviennent donc :

$$\alpha = 0, \quad \theta = -\frac{\delta \omega \Omega_z}{Mga}, \quad \alpha' = \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega}.$$

Nous devons donc poser dans les équations type du mouvement oscillant :

$$0 = -\lambda \sin \mu, \quad \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega} = \lambda R \cos \mu,$$

d'où

$$\mu = 0, \quad \lambda = \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega R},$$

$$\alpha = \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega R} \times \sin Rt.$$

L'élongation maxima est

$$\alpha_1 = \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega R}$$

α_1 est proportionnelle à la vitesse initiale : c'est donc bien une élongation balistique, puisque la vitesse initiale n'est pas nulle. L'instant de l'élongation est celui où la vitesse est nulle, c'est-à-dire :

$$Rt_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = \frac{T}{4}.$$

Il est indépendant de $\frac{Mja}{\delta \omega}$.

Dans le cas que nous avons choisi : augmentation de vitesse, le couple $Mja \cos \theta \cos R_v$ est positif si R_v est Nord, l'angle α est donc positif au départ : l'élongation est Ouest.

La déviation balistique α_1 est de même sens que la différence des variations $W' - W$, mais ne s'ajoute pas à elle.

On peut mettre α_1 sous une autre forme en écrivant :

$$\alpha_1 = \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega R} \times \frac{R}{R} = \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega R} \times \frac{1}{R} \times \frac{2\pi}{T}$$

$$\alpha_1 = \left(Mja \cos R_v \times \frac{2\pi}{T} \right) : \frac{\delta \omega \Omega \cos L}{Mga + \delta \omega}$$

Comme dans les compas usuels, $\frac{C}{\delta \omega}$ est négligeable devant $\frac{\delta \omega}{Mga}$, on peut écrire :

$$\alpha_1 = \frac{j}{g} \times \frac{2\pi \cos R_v}{\Omega \cos L} \times \frac{1}{T}.$$

La déviation balistique α_1 est d'autant plus grande que la période est plus petite, α_1 peut donc atteindre des valeurs considérables et, pratiquement, inadmissibles surtout si $R_v = 0$. De plus, si $\frac{C}{\partial \omega}$ n'est pas négligeable devant $\frac{\partial \omega}{Mga}$, la valeur de l'élongation est encore plus grande que celle donnée par cette formule : α_1 est donc un minimum de l'élongation.

Il est bon de signaler que la relation ci-dessus n'est vraie qu'autant que l'accélération agit d'une façon constante avec la même intensité.

On peut aussi avoir une relation donnant α_1 en fonction de la variation de vitesse du bâtiment, Δv .

La vitesse angulaire initiale de la perturbation est :

$$\alpha' = \frac{Mja \cos R_v}{\partial \omega}.$$

Le navire subit une variation de vitesse Δv , dont à chaque instant l'accélération est représentée par j , de telle sorte que :

$$\Delta v = \int_0^t j dt.$$

Et l'on aura :

$$\alpha_1 = \int \alpha' = \frac{Ma \Delta v \cos R_v}{\partial \omega} = \frac{\Delta v \cos R_v}{g \Omega \cos L} \times \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Cette formule n'est vraie que tant que l'effet de la variation de la vitesse peut être assimilé à une percussion. D'ailleurs elle ne tient pas compte du couple directeur.

On peut dresser une table donnant α_1 pour les différentes valeurs de T et de $\Delta v \cos R_v$.

§ 26. — **Déviation balistique due aux girations d'un bâtiment marchant à une vitesse constante.** — La déviation balistique due aux girations est d'un ordre de grandeur encore plus élevé que la déviation balistique due aux variations de vitesse. Les calculs étant très compliqués, nous nous placerons dans un cas particulier.

Supposons, par exemple, un navire sans roulis ni tangage, faisant route au Nord. Le navire vient brusquement sur la gauche d'un angle R_v et conserve ensuite ce nouveau cap, le $NR_v Ot$.

Par suite de son inertie, sous l'effet de la force centrifuge, le compas gyroscopique est brusquement rejeté à l'extérieur du cercle de giration et il en résulte une déviation balistique de la rose. Nous voulons calculer la déviation balistique maxima α_1 qui résulte de cette évolution, ainsi que la déviation α_{R_v} atteinte lorsque le bâtiment atteindra son nouveau cap, le NR_vOt .

La déviation balistique due à la giration procède de trois causes :

1° — Dès que le navire commence son abattée, une accélération centrifuge prend naissance;

2° — Seule, produit une déviation de la rose, la composante de l'accélération située dans le plan $z'Ox$, qui est sensiblement fixe sur la terre. Par suite, pendant l'abattée, il y aura variation de cette composante perturbatrice;

3° — L'accélération centrifuge disparaît dès que le navire a pris son nouveau cap.

Dans le cas particulier où nous nous sommes placés, route au Nord, la première des trois causes n'existe pas puisque l'axe du tore est situé dans le plan longitudinal du navire; l'effet de la force centrifuge est de faire pivoter l'appareil autour de l'axe Ox , ce qui ne cause aucune perturbation dans l'équilibre.

Nous désignerons par r_v l'angle que fait à chaque instant le cap du navire avec le méridien. Soient, d'autre part :

φ la vitesse angulaire de giration et

v la vitesse linéaire constante du navire en centimètres par seconde.

$$i = \varphi \times v$$

sera l'accélération centrifuge, et la composante perturbatrice sera :

$$j_x = -\varphi \times v \sin(r_v - \alpha).$$

Le moment du couple perturbateur est, θ étant petit :

$$-Ma\varphi v \sin(r_v - \alpha).$$

Si le début de l'abattée est pris pour origine des temps, on peut poser $r_v = \varphi t$ et l'expression du couple perturbateur devient :

$$-Ma\varphi v \sin(\varphi t - \alpha).$$

Les équations (2) du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} \mathfrak{J} \omega (\Omega_x + \alpha') + Mga\theta + Ma\varphi v \sin(\varphi t - \alpha) = 0, \\ C\alpha'' - \mathfrak{J} \omega (\Omega_y + \theta') = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont valables pour les valeurs de φt comprises entre 0 et R_v , c'est-à-dire entre les temps $t = 0$ et $t = \frac{R_v}{\varphi}$.

Les calculs sont fort compliqués, nous les simplifierons en admettant que α est toujours assez petit pour qu'on puisse poser :

$$\sin(\varphi t - \alpha) = \sin \varphi t,$$

et :

$$\sin \alpha = \alpha.$$

L'élimination de θ entre les deux équations donne :

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \left(C + \frac{\mathfrak{J}^2 \omega^2}{Mga} \right) + \mathfrak{J} \omega \Omega \cos L \times \alpha = - \mathfrak{J} \omega \frac{\varphi^2 v}{g} \cos \varphi t.$$

Nous reconnaissons là une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec un second membre fonction circulaire, dont la forme générale est :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = A \cos mx + B \sin mx$$

Nous ne développerons pas les calculs qui conduisent à l'intégrale générale qui est de la forme :

$$y = y_0 + R_1 \cos mx + R_2 \sin mx$$

avec :

$$R_1 = \frac{(Q - m^2)A - mPB}{(Q - m^2)^2 + m^2 P^2} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{(Q - m^2)B + mPA}{(Q - m^2)^2 + m^2 P^2}.$$

Dans cette expression y_0 est l'intégrale de l'expression différentielle prise sans le second membre.

Dans notre cas, on a :

$$P = 0, \quad B = 0.$$

Il reste donc :

$$R_1 = \frac{A}{Q - m^2}, \quad R_2 = 0.$$

D'où :

$$y = y_0 + \frac{A}{Q - m^2} \cos mx.$$

Finalement, d'après les équations générales du § 15 :

$$\alpha = \lambda \sin(Rt - \mu) + \frac{A}{Q - m^2} \cos mt.$$

La vitesse angulaire est :

$$\alpha' = \lambda R \cos(Rt - \mu) - \frac{Am}{Q - m^2} \sin mt.$$

Les conditions initiales sont :

$$t = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \theta = -\frac{3\omega\Omega_z}{Mga},$$

c'est-à-dire :

$$t = 0, \quad -\lambda \sin \mu + \frac{A}{Q - m^2} = 0, \quad \lambda R \cos(-\mu) = 0,$$

d'où :

$$\mu = +\frac{\pi}{2}, \quad \lambda = +\frac{A}{Q - m^2},$$

$$\alpha = \frac{A}{Q - m^2} (\cos mt - \cos Rt).$$

Lorsque le navire a atteint la route R_v , on a $t = \frac{R_v}{\varphi}$ et l'élongation α atteinte est :

$$\alpha_{R_v} = \frac{A}{Q - m^2} \left(\cos m \frac{R_v}{\varphi} - \cos R \frac{R_v}{\varphi} \right).$$

Tous calculs faits, on a :

$$\frac{A}{Q - m^2} = -\frac{\varphi^2 v}{g\Omega \cos L} \times \frac{R^2}{R^2 - \varphi^2}, \quad m = \varphi.$$

$$\alpha_{R_v} = \frac{\varphi^2 v}{g\Omega \cos L} \times \frac{R^2}{R^2 - \varphi^2} \left(\cos \frac{R}{\varphi} R_v - \cos R_v \right).$$

La vitesse angulaire de rotation de la rose à ce moment est

$$\alpha'_{R_v} = \frac{d\alpha_{R_v}}{dt} = \frac{\varphi^2 v}{g\Omega \cos L} \times \frac{R^2}{R^2 - \varphi^2} \left(\varphi \sin R_v - R \sin \frac{R}{\varphi} R_v \right).$$

Le navire a donc atteint la route R_v , mais la vitesse de l'oscillation n'est pas encore nulle et l'élongation continuera à croître jusqu'à un maximum α_2 que nous voulons déterminer.

Au moment où le navire a atteint la route R_v , l'accélération centrifuge qui, maintenant, disparaît, créait un couple :

$$-Ma\varphi v \sin R_v,$$

en supposant α_{2R_v} petit devant R_v .

A ce moment, le mouvement α était défini par l'équation :

$$\mathfrak{J}\omega(\Omega_z + \alpha'_{R_v}) + Mga\theta + Ma\varphi v \sin R_v = 0.$$

De sorte que le passage de la giration au nouveau cap fixe R_v imprime à la rosé une vitesse :

$$\alpha'_{R_v} = -\frac{Ma\varphi v}{\mathfrak{J}\omega} \sin R_v,$$

qui vient s'ajouter à la vitesse α'_{2R_v} déjà existante ; les conditions initiales sont donc :

$$\alpha = \alpha_{2R_v}, \quad \alpha' = \alpha'_{2R_v} - \frac{Ma\varphi v}{\mathfrak{J}\omega} \sin R_v, \quad \theta = -\frac{\mathfrak{J}\omega\Omega_z}{Mga},$$

qui donne :

$$\alpha_{2R_v} = -\lambda \sin \mu, \quad \alpha' = \lambda R \cos(-\mu).$$

L'élimination de μ donne :

$$\alpha_{2R_v}^2 = \lambda^2 \left(1 - \frac{\alpha'^2}{\lambda^2 R^2} \right).$$

On obtient pour λ qui représente la valeur maxima α_2 de α :

$$\lambda^2 = \alpha_2^2 = \alpha_{2R_v}^2 + \frac{1}{R^2} \times \alpha'^2.$$

Tous calculs faits :

$$\alpha_2^2 = \left\{ \left[\frac{R^2}{R^2 - \varphi^2} \times \frac{\varphi^2 v}{g\Omega \cos L} \left(\cos \frac{R}{\varphi} R_v - \cos R_v \right) \right]^2 + \left[\frac{R}{R^2 - \varphi^2} \times \frac{\varphi^2 v}{g\Omega \cos L} \left(\varphi \sin R_v - R \sin \frac{R}{\varphi} R_v \right) - \frac{Ma\varphi v}{\mathfrak{J}\omega R} \sin R_v \right]^2 \right\}.$$

Telle est la valeur de la déviation totale due à un changement de route : c'est, en général, une élongation balistique puisque, en général, la vitesse de la rose n'est pas nulle au commencement de l'évolution du bâtiment.

Si la période T du compas était infiniment grande, c'est-à-dire si $R = 0$, la perturbation serait nulle. La déviation est donc fonction inverse de la période. α_2 peut atteindre des valeurs considérables. Toutes choses égales d'ailleurs, α_2 est encore plus considérable que la déviation α_1 , étudiée au § 25.

Dans le cas particulier choisi, le couple $-Mav \sin(r_v - \alpha)$ est négatif, l'angle α est donc négatif au départ, l'élongation est Est.

La déviation balistique α_2 , tout comme α_1 , est de même sens que la différence des variations $W' - W$, mais ne s'ajoute pas à elle.

§ 27. — **Conclusions. Détermination de la période. Compas gyroscopique compensé.** — Cette longue discussion peut paraître oiseuse puisque, pratiquement, nous ne pouvons pas corriger la route de l'erreur balistique du compas. Cependant, elle a une importance de premier ordre, car les valeurs que l'on se permet pour α_1 et α_2 commandent toutes les dimensions d'un compas gyroscopique.

Sur les petits bâtiments, les torpilleurs par exemple, les variations de vitesse sur une route fixe peuvent être considérables, et cela malgré la volonté du commandant, par exemple par gros temps et mer debout. Avec une courte période, comparable à la période des roses magnétiques, les déviations balistiques atteindraient des valeurs inadmissibles.

Sans doute, l'action des couples perturbateurs n'est que momentanée et disparaît peu à peu, et cette disparition cause une déviation balistique opposée à la première et la compense en partie avant que soit atteinte l'élongation maxima. Mais encore faut-il, pour que cette sorte d'intégration de mouvements soit possible, que ces mouvements soient petits et que leur succession dans le temps soit petite par rapport à la période propre de l'appareil. Pour obtenir quelque précision dans les indications du compas, il convient donc de prendre pour T une valeur très élevée, de l'ordre de l'heure.

Cela oblige, il est vrai, à lancer l'appareil un temps très appré-

ciable avant l'appareillage; cependant, l'inconvénient est mince vis-à-vis des avantages marqués du compas gyroscopique.

Sur un grand bâtiment, paquebot, cuirassé, etc., on peut prendre pour T des valeurs plus faibles, car les effets de la mer seront négligeables par les temps normaux.

Mais il y a mieux : le calcul détermine la valeur que doit avoir la période d'un appareil déterminé.

Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, que *la déviation balistique était toujours de même sens que la différence des variations $W' - W$, mais ne s'ajoutait pas à elle.*

On peut donc se proposer de construire le compas, de telle sorte que, à une latitude donnée, la déviation balistique soit précisément égale à la différence $W' - W$ correspondant à cette latitude.

Cette condition détermine T pour ce bateau et la latitude choisie, T est en effet donnée par la relation :

$$\frac{\Delta v \cos R_v}{g_L \Omega \cos L} \times \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\Delta p \cos R_v}{\Omega \cos L} = \frac{\Delta v \cos R_v}{r \Omega \cos L}.$$

r étant le rayon terrestre.

Cette relation montre d'ailleurs que, si la compensation est réalisée à une latitude L , elle est réalisée pour toutes les vitesses $\Delta v \cos R_v$ du bateau naviguant à cette latitude L .

Un compas compensé pour une latitude donnée, n'oscille donc pas à cette latitude lors d'une variation de vitesse quelconque $\Delta v \cos R_v$. Il prend immédiatement sa nouvelle position d'équilibre.

La période T_{comp} , qui réalise la compensation à une latitude L , est donc :

$$T_{\text{comp}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g_L}}.$$

On peut énoncer la loi suivante :

La période qui réalise la compensation à une latitude donnée est la même que celle, à cette latitude, d'un pendule dont la longueur est égale au rayon terrestre.

Pratiquement, la compensation effectuée avec cette période sera un peu trop forte, car les variations de vitesse ne sont pas instantanées.

Pour les grands bâtiments, on pourra donc prendre pour T une valeur légèrement inférieure à celle que donne le calcul. La valeur T_{comp} convient, au contraire, aux petits bâtiments.

On comprend maintenant l'utilité de la discussion des élongations balistiques, qui impose d'une façon rigoureuse la valeur de la période suivant le type de navire sur lequel on doit placer l'appareil.

§ 28. — Déviations balistiques dues au roulis et au tangage.

— Le calcul serait ici fort compliqué, mais, nous le répétons, sans aucun intérêt, puisque la formule trouvée ne peut servir à corriger les indications du compas.

En tout cas, les déviations balistiques seront très faibles par rapport à celles étudiées aux §§ 25 et 26, car, avec la valeur considérable de la période propre du compas devant la période du navire, il y aura intégration des petits mouvements et, de plus, les phénomènes de résonance n'auront aucune chance de se produire. Pratiquement, le compas, construit suivant les indications du § 27, ne déviara pas au roulis et au tangage.

CHAPITRE III.

Influence d'une variation de vitesse du tore sur l'équilibre du compas gyroscopique.

Une variation de vitesse du tore influence de deux façons la position d'équilibre du compas gyroscopique.

§ 29. — Modification de l'angle θ sous l'influence d'une variation de vitesse du tore. — La relation (8)

$$\text{tang } \theta = \frac{\delta \omega \Omega \sin L}{Mga + \delta \omega \Omega \cos L},$$

peut s'écrire :

$$\text{tang } \theta = \frac{\delta \Omega \sin L}{\frac{Mg}{\omega} + \delta \Omega \cos L}.$$

L'angle θ croît de 0 à L lorsque ω , d'abord nul, augmente indéfiniment. (Voir première partie, chapitre II.)

Nous n'insistons pas ici sur l'importance de cette remarque, qui ressortira de l'étude des systèmes amortisseurs. (Voir troisième partie, § 37.)

§ 30. — Influence d'une variation de vitesse du tore : par exemple, cessation brusque du courant électrique alimentant le moteur qui donne au tore son mouvement entretenu. — Pour plus de clarté dans le raisonnement, nous nous supposons à l'Équateur, afin de poser $\theta = 0$.

Tant que le gyroscope conserve une vitesse uniforme, la tige T reste verticale. Si la vitesse vient à varier, l'appareil présente sous sa forme presque classique le problème du chat qui retombe sur ses pattes. Il suffit, comme dans ce problème, d'appliquer le Théorème des aires.

L'aire totale balayée par tour par le rayon vecteur OA, quand le point A décrit dans le sens de la flèche la circonférence ABCD, est évidemment égale à l'aire du cercle ABCD décrit dans le sens de la flèche.

$\mathfrak{J}$ étant le moment d'inertie du tore par rapport à son axe, et A le moment d'inertie du système tout entier par rapport à l'axe O, on a :

$$\mathfrak{J} \omega + A p = \text{Constante.}$$

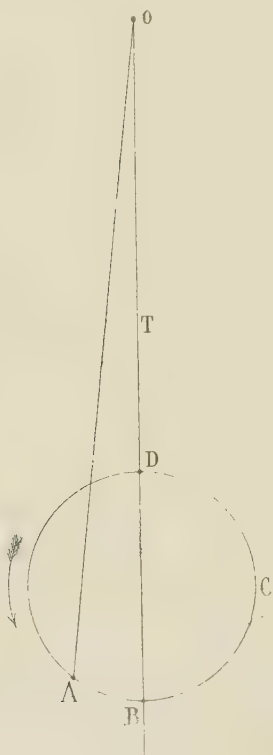
ω est la vitesse angulaire propre du gyroscope, et p la vitesse angulaire de l'ensemble du système autour de l'axe O.

Si ω_0 est la vitesse angulaire du gyroscope lorsque le mouvement est uniforme, on aura évidemment, puisque dans ce cas $p = 0$:

Fig. 9.

$$\mathfrak{J} \omega + A p = \mathfrak{J} \omega_0, \quad \text{ou} \quad A p = \mathfrak{J} (\omega_0 - \omega).$$

Si le courant cesse brusquement, par exemple, par suite de la fusion d'un plomb de sécurité, ω devient nul; l'ensemble de l'appareil



reil va prendre une vitesse p , dont le sens est celui de la rotation ω . Mais le mouvement sera d'assez courte durée, car, bientôt, la pesanteur opposera à cette élévation un couple égal et opposé à celui qui provoque le mouvement.

Le compas étant en équilibre dans le plan méridien, on verra donc basculer le compas autour de la ligne Nord-Sud, l'Ouest de la rose s'élevant au-dessus de l'horizon, puis, peu à peu, la rose redeviendra horizontale, position qu'elle atteindra lorsque le tore aura repris une vitesse angulaire constante (s'il s'agit de cessation complète de courant, cette nouvelle vitesse constante sera évidemment $\omega_0 = 0$).

Une brusque élévation de voltage aux bornes se traduira, au contraire, par une élévation de l'Est de la rose.

Mais il convient de faire remarquer que, en aucun cas, l'effet ci-dessus, dû à la variation de vitesse du tore, ne peut déranger le compas de sa position d'équilibre au Nord, car, tous les mouvements, et, par suite, les couples qui leur donnent naissance, ont lieu autour de l'axe Ox .

Nous verrons bientôt qu'il n'en est pas de même, en certains cas, de la variation de θ signalée au § 29.

TROISIÈME PARTIE.

ÉTUDE SOMMAIRE DE L'AMORTISSEMENT DU MOUVEMENT DU COMPAS ET DES SYSTÈMES AMORTISSEURS.

§ 31. — **Nécessité d'un système amortisseur.** — Lorsque le compas gyroscopique est destiné à un navire, on doit s'attacher à réaliser une suspension aussi parfaite que possible. Le système qui forme pivot vertical autour duquel s'oriente la rose doit être étudié de façon à ne donner qu'un frottement inappréciable. Il est indispensable, en effet, que le bâtiment n'entraîne pas la rose avec lui dans ses évolutions. Mais alors, de la perfection de la suspension, il résulte que jamais l'axe du gyroscope ne se tiendra dans le plan du méridien : le mouvement oscillatoire autour du méridien sera presque parfait et se continuera indéfiniment.

Il est impossible de gouverner avec un tel instrument si l'on n'y adjoint un système amortisseur qui étouffe peu à peu le mouvement oscillatoire et arrête, après un temps plus ou moins long, l'appareil dans sa position d'équilibre.

§ 32. — **Conditions que doit remplir le système amortisseur.** — Le système amortisseur peut évidemment amortir soit le mouvement pendulaire de l'appareil dans le plan vertical passant par l'axe du tore, soit le mouvement oscillatoire de l'appareil autour du plan méridien. Ces deux mouvements sont en effet conséquents l'un de l'autre, et l'amortissement de l'un entraîne l'amortissement de l'autre.

Un système amortisseur bien compris doit remplir les deux conditions principales suivantes :

1^o — *Ne pas créer de frottement lorsque la rose est en équilibre dans le plan méridien ;*

2^o — *Être indépendant du lieu de la terre où l'on se trouve.*

Si le système amortisseur créait un frottement lorsque l'appareil est en équilibre dans le plan méridien, on retomberait ainsi sur

l'écueil que l'on veut éviter en recherchant la perfection du pivotage.

On doit donc rejeter les systèmes amortisseurs, tels que ceux à bain d'huile ou ceux utilisant les phénomènes d'induction et qui se rencontrent couramment dans les compteurs électriques, par exemple.

En effet, lorsque le bâtiment évolue, il entraîne avec lui le bain d'huile ou la couronne d'aimants qui entoure le disque de cuivre; par suite de la viscosité du liquide ou du champ magnétique, le liquide ou les aimants entraîneront le disque amortisseur et feront dévier la rose.

On a proposé une solution assez élégante du problème. Mais cette solution ne remplit que la première des conditions imposées.

Avant de décrire ce système, nous allons étudier brièvement les modifications que l'introduction d'un couple amortisseur *proportionnel à la vitesse* apporte au mouvement du compas gyroscopique.

§ 33. — **Discussion de l'équation d'un mouvement oscillatoire amorti, dans le cas où l'amortissement est proportionnel à la vitesse.** — Les considérations qui suivent se trouvant longuement développées dans tous les traités de Mécanique rationnelle, nous les résumerons très rapidement, nous réservant seulement les points qui peuvent présenter quelque intérêt pour le cas particulier du compas gyroscopique.

Si F est le couple amortisseur qui correspond à la vitesse angulaire unité, nous rappelons que l'équation générale d'un mouvement oscillatoire amorti peut se mettre sous la forme :

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + F \frac{d\alpha}{dt} + K \alpha = 0.$$

L'intégrale générale est encore de la forme :

$$\alpha = Me^{\rho_1 t} + Ne^{\rho_2 t},$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les racines de l'équation :

$$I\rho^2 + F\rho + K = 0.$$

Nous nous bornerons au seul cas où le mouvement est péri-

dique, c'est-à-dire que les racines de l'équation en p sont imaginaires :

$$F^2 - 4KI < 0.$$

Les deux racines de l'équation sont donc :

$$p_1 = -b + b'i, \quad p_2 = -b - b'i.$$

avec :

$$b = + \frac{b'}{2I} \quad b' = + \frac{\sqrt{4KI - F^2}}{2I}.$$

On a donc :

$$\alpha = e^{-bt} (Me^{b'it} + Ne^{-b'it})$$

que l'on transforme facilement en :

$$\alpha = e^{-bt} \times A \sin(b't - B),$$

d'où :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -Abe^{-bt} \times \sin(b't - B) + Ab'e^{-bt} \cos(b't - B).$$

Les constantes A et B se déterminent par les conditions initiales.

Prenons pour origine des temps, l'époque d'un passage à la position d'équilibre, c'est-à-dire que l'on a simultanément :

$$t = 0 \quad \alpha = 0 \quad \frac{d\alpha}{dt} = \alpha',$$

(C'est là aussi le cas d'une déviation balistique du compas gyroscopique.) On en déduit :

$$B = 0,$$

et :

$$A = \frac{\alpha'}{b'}.$$

On alors pour α et $\frac{d\alpha}{dt}$ les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\alpha'}{b'} e^{-bt} \sin b't \\ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha'}{b'} e^{-bt} (b' \cos b't - b \sin b't). \end{cases}$$

La première de ces équations montre bien que le mouvement est oscillatoire et amorti, puisque α est un produit de deux facteurs

dont l'un décroît constamment et dont l'autre oscille entre -1 et $+1$.

L'élongation a lieu pour $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, c'est-à-dire à un temps τ , tel que :

$$b' \cos b' \tau = b \sin b' \tau,$$

$$\tau = \frac{1}{b'} \operatorname{arc tang} \frac{b'}{b}.$$

Mais $\operatorname{arc tang} \frac{b'}{b}$ n'est défini qu'à un multiple près de π . Si on appelle μ le plus petit arc inférieur à $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente soit $\frac{b'}{b}$, les valeurs de τ seront :

$$\tau = \frac{1}{b'} (\mu + k\pi).$$

Entre deux élongations consécutives de part et d'autre de la position d'équilibre, il s'écoule un temps :

$$\frac{T'}{2} = \frac{\pi}{b'},$$

et entre deux élongations consécutives du même côté de la position d'équilibre, un temps :

$$T' = \frac{2\pi}{b'}.$$

T' qui est constant est la période du mouvement oscillant amorti :

$$T' = \frac{2\pi}{b'}.$$

Si on cherche maintenant les valeurs du temps pour lesquelles $\alpha = 0$, on trouve :

$$b't = k\pi \quad t = k \frac{\pi}{b'}.$$

Entre deux passages consécutifs au zéro, il s'écoulera un temps $\frac{\pi}{b'}$ et entre deux passages consécutifs au zéro, mais avec la vitesse dirigée dans le même sens, il s'écoulera un temps :

$$\frac{2\pi}{b'} = T'.$$

Nous rappelons que le temps qui s'écoule entre un maximum et le zéro n'est pas le même que celui qui s'écoule entre ce zéro et le premier maximum de sens contraire au précédent. En effet, soient :

a l'époque du premier zéro qui a lieu pour $t = 0$;

b l'époque du premier maximum positif qui a lieu pour

$$t = \frac{1}{b'} \arctan \frac{b'}{b};$$

c l'époque du deuxième zéro qui a lieu pour $t = \frac{\pi}{b'}$;

d l'époque du premier maximum négatif qui a lieu pour

$$t = \frac{\pi}{b'} + \frac{1}{b'} \arctan \frac{b'}{b}, \text{ on aura donc :}$$

$$c - b = \frac{1}{b'} \left(\pi - \arctan \frac{b'}{b} \right),$$

$$d - c = \frac{1}{b'} \arctan \frac{b'}{b}.$$

Or :

$$\frac{b'}{b} > 0,$$

donc :

$$\arctan \frac{b'}{b} < \frac{\pi}{2},$$

et :

$$c - b > d - c.$$

Variation des amplitudes. — L'instant du premier maximum est donné par :

$$\tau = \frac{1}{b'} \times \arctan \frac{b'}{b},$$

et sa valeur sera :

$$\alpha_{\max \text{ pos}} = \frac{\alpha'}{b'} \times e^{-b\tau} \sin b'\tau.$$

Un second maximum aura lieu au temps $\tau + \frac{T'}{2}$, sa valeur sera :

$$\alpha_{\max \text{ nég}} = \frac{\alpha'}{b'} \times e^{-b\left(\tau + \frac{T'}{2}\right)} \sin b'\left(\tau + \frac{T'}{2}\right).$$

Que τ corresponde ou non à un maximum pour $\sin b'\tau$, on a toujours :

$$b'T' = 2\pi \quad \sin b'\tau = -\sin b'\left(\tau + \frac{T'}{2}\right),$$

d'où, en valeur absolue :

$$\frac{\alpha_{\max \text{ pos}}}{\alpha_{\max \text{ nég}}} = e^{\frac{b T'}{2}}.$$

Si l'on numérote les maxima dans l'ordre où ils se présentent dans le temps, et si on désigne par λ la valeur constante $\frac{b T'}{2}$, on posera :

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = e^{\lambda}.$$

Les amplitudes décroissent donc en progression géométrique ; la quantité λ s'appelle le « *décroissement logarithmique* » des oscillations, c'est une caractéristique du mouvement périodique amorti.

Rapport de la période T sans amortissement à la période T' avec amortissement. — On se rappelle (voir § 15) que :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{K}}.$$

Donc :

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi}{b'} \times \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{1}{K}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{F^2}{4KI}}}.$$

ou, en développant :

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{F^2}{8KI} + \dots$$

On voit que l'on ne peut admettre que le frottement proportionnel à la vitesse ne modifie pas sensiblement la durée de l'oscillation que s'il n'est pas trop grand.

§ 34. — **Discussion des équations types dans le cas des oscillations du compas gyroscopique.** — Il résulte de tous les raisonnements du paragraphe 33, ce qui suit :

1° — λ atteint des valeurs très élevées pour ne pas exagérer le temps qu'exige le lancement de l'appareil. Par suite, F est assez grand et T' diffère notablement de T .

Avec amortissement, la période est pratiquement augmentée de la

valeur $T \times \frac{F^2}{8KI}$, c'est-à-dire :

$$T \times \frac{F^2}{8\mathfrak{J}\omega\Omega \cos L \left(C + \frac{\mathfrak{J}^2\omega^2}{Mga} \right)}.$$

On a en effet :

$$K = \mathfrak{J}\omega\Omega \cos L,$$

et :

$$I = C + \frac{\mathfrak{J}^2\omega^2}{Mga};$$

2° — L'équation du mouvement oscillant est :

$$\alpha = \frac{\alpha'}{b'} e^{-bt} \sin b' t,$$

α' est lié à l'écart initial de par la relation :

$$\alpha' = b' \alpha_0 e^{\frac{bT'}{4}},$$

$$b = \frac{F}{2\left(C + \frac{\mathfrak{J}^2\omega^2}{Mga}\right)}, \quad b' = \frac{\sqrt{4\mathfrak{J}\omega\Omega \cos L \left(C + \frac{\mathfrak{J}^2\omega^2}{Mga}\right) - F^2}}{2\left(C + \frac{\mathfrak{J}^2\omega^2}{Mga}\right)}.$$

Le compas atteindra sa position d'équilibre après un temps qui sera toujours le même, quelle que soit la latitude à laquelle on se trouve. Cela tient à ce que b ne dépend que de la construction de l'appareil.

Mais le nombre d'oscillations qu'il fera avant d'atteindre cette position d'équilibre varie avec la latitude : il fera d'autant moins d'oscillations que la latitude sera plus élevée.

On déterminera donc F pour que, avec un écart initial donné, le compas mette un temps déterminé à prendre sa position d'équilibre.

On voit qu'il y a toujours intérêt à placer le compas aux environs de sa position d'équilibre avant de mettre en marche, car on diminue ainsi le temps avant lequel on pourra pratiquement l'utiliser.

En effet, le terme $\frac{\alpha'}{b'}$ dépendant de α_0 , l'écart α avec le méridien sera d'autant moindre que α_0 sera plus petit. Si α_0 est assez petit, l'écart α pourra être, au bout de très peu de temps, plus petit que l'approximation recherchée pour la route.

3° — Il est facile de calculer l'équation du mouvement de nutation amorti, car on sait (voir § 17) que le mouvement de nutation est un mouvement sinusoïdal de même période que le mouvement de précession, en quadrature dans le temps avec lui.

$$\vartheta = -\frac{\partial \omega}{Mga} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \omega \Omega \sin L}{Mga}.$$

Or, d'après l'équation ci-dessus, on a :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha'}{b'} e^{-bt} (b' \cos b't - b \sin b't).$$

Considérons un angle ε défini par la relation :

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{\lambda}{\pi}.$$

λ étant le décrement logarithmique du mouvement oscillant amorti, il vient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha'}{b'} e^{-bt} \cos(b't + \varepsilon) \times \frac{b'}{\cos \varepsilon}.$$

Il est facile de voir que l'on a :

$$\frac{b'}{\cos \varepsilon} = \frac{2\pi}{T}.$$

En effet :

$$\frac{b'^2}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{b'^2}{\frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} = b'^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right) = b^2 + b'^2,$$

car :

$$\lambda = \frac{bT'}{2} = \frac{b}{b'} \times \pi \quad \text{puisque} \quad T' = \frac{2\pi}{b'},$$

d'où :

$$\frac{b'^2}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{K}{I} = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Le mouvement de nutation a finalement pour équation :

$$\vartheta = -\frac{\partial \omega}{Mga} \times \frac{\alpha'}{b'} \times \frac{2\pi}{T} e^{-bt} \cos(b't + \varepsilon) + \frac{\partial \omega \Omega \sin L}{Mga}$$

avec :

$$\varepsilon = \text{arc tang } \frac{\lambda}{\pi}.$$

On verrait très facilement que la projection de la trajectoire du centre de gravité du compas sur un plan horizontal est une sorte de spirale lemniscatique.

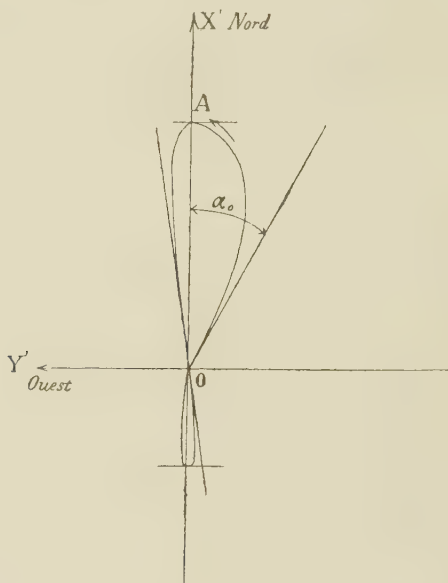


Fig. 10.

§ 35. — **Discussion des équations types dans le cas des élongations balistiques des compas gyroscopiques.** — Nous n'appliquerons les considérations qui précèdent qu'au cas prévu au § 25. Les calculs sont beaucoup trop complexes dans le cas du § 26 pour être exposés ici. D'ailleurs, nous savons *a priori* que les conclusions s'appliquent également aux deux cas.

Valeur d'une élongation balistique sans amortissement, valeur d'une élongation balistique avec amortissement (cas du § 25).

1° — Nous rappelons que la valeur de l'élongation balistique, tirée des équations types du mouvement oscillatoire non amorti, est :

$$\alpha_{\max. \text{ (sans amort.) }} = \frac{\alpha'}{k}.$$

L'élongation balistique lorsque le mouvement est amorti, est :

$$\alpha_{\max. (\text{avec amort.})} = \frac{\alpha'}{b'} \times e^{-b'\tau} \sin b'\tau$$

avec :

$$\tau = \frac{1}{b'} \arctan \frac{b'}{b}.$$

En effectuant les calculs, on trouve :

$$\alpha_{\max. (\text{avec amort.})} = \alpha' \times \frac{e^{-\frac{b}{b'} \arctan \frac{b'}{b}}}{\sqrt{b^2 + b'^2}}.$$

ou encore :

$$\alpha_{\max. (\text{avec amort.})} = \frac{\alpha'}{R} \times e^{-\frac{F}{\sqrt{4KI-F^2}} \times \arctan \frac{\sqrt{4KI-F^2}}{F}}.$$

L'élongation avec amortissement est donc plus petite que sans amortissement puisque l'expression exponentielle essentiellement positive est précédée du signe — et le rapport des deux élongations est :

$$e^{-\frac{F}{\sqrt{4KI-F^2}} \times \arctan \frac{\sqrt{4KI-F^2}}{F}};$$

Avec amortissement, l'élongation balistique α_1 est diminuée, elle n'est plus que :

$$\alpha_1 = \frac{Mja \cos R_v}{\delta \omega R} \times e^{-\frac{F}{\sqrt{4KI-F^2}} \times \arctan \frac{\sqrt{4KI-F^2}}{F}};$$

K et I ayant les mêmes valeurs que ci-dessus :

2° — Avec les simplifications admises, on peut encore écrire, tous calculs faits :

$$\alpha_1 = \frac{j}{g} \times \frac{2\pi \cos R_v}{\Omega \cos L} \times \frac{1}{T} \times e^{-\sqrt{\frac{-\frac{T'}{T} + 1}{\frac{T'}{T} - \frac{3}{2}}} \times \arctan \sqrt{\frac{-\frac{T'}{T} + \frac{3}{2}}{\frac{T'}{T} - 1}}}.$$

T est une constante qui dépend uniquement de la forme de l'appareil et non de la valeur de F. On voit donc que pour modifier la valeur de α_1 on pourra, au lieu d'agir sur T, c'est-à-dire, pratiquement, sur la cote a de l'appareil, faire varier T', c'est-à-dire F, ce qui est infiniment plus simple.

On sait que T' croît avec F , et nous allons voir que l'exponentielle croît avec T' ; par suite, pour diminuer α_1 , il suffit d'augmenter F .

En effet, la dérivée par rapport à T' du facteur exponentiel privé de son signe — est :

$$\frac{T}{4\left(\frac{3}{2} - \frac{T'}{T}\right) \sqrt{\left(\frac{T'}{T} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{T'}{T}\right)}} \times \left[\text{arc tang} \sqrt{\frac{\frac{3}{2} - \frac{T'}{T}}{\frac{T'}{T} - 1}} - 2 \sqrt{\left(\frac{T'}{T} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{T'}{T}\right)} \right].$$

Le premier facteur est toujours positif puisque l'on doit avoir :

$$1 < \frac{T'}{T} < \frac{3}{2}.$$

Cette inégalité traduisant, comme il est facile de le voir, la condition de possibilité :

$$4KI - F^2 > 0.$$

Le second facteur varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0 lorsque $\frac{T'}{T}$ croît de 1 à $\frac{3}{2}$; il est donc également toujours positif.

La dérivée du facteur exponentiel privé de son signe — étant constamment positive, il en résulte que lorsque T' , c'est-à-dire le frottement F croît, le terme e^{-} décroît, donc α_1 .

Cette conclusion est très intéressante, car *un même type d'appareil pourra servir aux grands comme aux petits bâtiments. Il suffira de faire varier convenablement la valeur du couple amortisseur en passant de l'un à l'autre navire.*

Les conditions aux limites se comprennent aisément :

$$\frac{T'}{T} = 1, \text{ il n'y a pas d'amortissement.}$$

$\frac{T'}{T} = \frac{3}{2} - (4KI - F^2 = 0)$, l'amortissement est infini, c'est là le cas de l'apériodicité critique. L'exponentielle se présente sous la

forme $\infty \times 0$. On sait que sa vraie valeur est l'unité et que, dans ce cas, l'élongation est donnée par la relation :

$$x_{\max.} = \frac{a'}{(b = b')} \times \frac{1}{e}.$$

§ 36. — **Système amortisseur à réaction d'air.** — Maintenant que nous avons terminé avec ces considérations théoriques un peu ardues, mais dont l'importance pratique ne peut échapper ainsi que nous l'avons fait voir ci-dessus (§ 35, 2°), nous allons décrire un système amortisseur à réaction d'air qui donne une solution du problème, mais qui offre, toutefois, de très graves défauts.

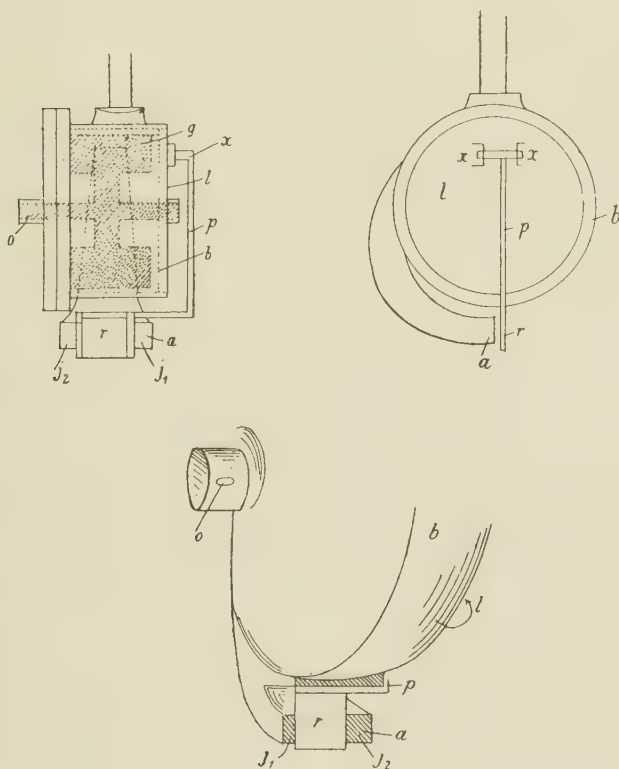


Fig. 11.

Le système proposé utilise la variation de l'angle θ lorsque la rose oscille autour du méridien. Nous rappelons (voir § 18) que

l'angle θ est proportionnel à la vitesse de l'oscillation et que le mouvement de θ a lieu dans le plan vertical passant par l'axe de rotation du tore.

Le gyroscope est établi sous la forme d'une pompe centrifuge qui aspire de l'air et le projette par une buse qui est obturée plus ou moins par un registre dont le déplacement est proportionnel à θ . La réaction du jet d'air crée donc une force variable.

Le gyroscope g est enfermé dans une boîte b complètement fermée. L'air est aspiré, suivant l'axe, par de petites ouïes o , et est rejeté par la buse a , dont le plan d'ouverture est parallèle à l'axe du tore. A la paroi latérale l , de la boîte b , est suspendu un pendule p qui oscille autour d'un axe xx , et qui porte à son extrémité inférieure un registre r , de surface convenable, qui se déplace devant la buse a .

L'air qui s'échappe de la buse se trouve divisé en deux jets, j_1 et j_2 , qui donnent lieu à une réaction qui tend à faire tourner la boîte b autour de l'axe de suspension, et, par suite, l'axe du tore, dont les paliers sont fixés sur la boîte, et la rose des vents solidaire de la boîte.

Si les deux jets, j_1 et j_2 sont égaux en force, c'est-à-dire, en somme, si les ouvertures de la buse sont égales de part et d'autre du registre, les deux forces de réaction étant égales s'annulent l'une l'autre et la boîte b reste immobile.

Mais, si une des ouvertures devient plus grande que l'autre, un couple différentiel prend naissance, qui fait tourner la boîte b dans un sens déterminé.

On conçoit donc que l'on peut disposer convenablement l'appareil, afin que l'effet du couple différentiel de réaction soit toujours opposé au couple qui provoque l'oscillation de la rose autour du méridien et, par suite, amortisse le mouvement d'oscillation de la rose autour du méridien.

Il est facile de se rendre compte que ce couple est bien proportionnel à l'angle θ du pendule et de l'axe de suspension du gyroscope.

Soient $2\theta_0$ l'angle d'ouverture de la buse, et θ_1 l'angle qui correspond à l'obturation du pendule.

θ est l'inclinaison de l'axe de suspension du gyroscope sur la verticale.

Les couples dus à la réaction du jet d'air sont proportionnels :

à droite à : $\left(\theta_0 - \frac{\theta_1}{2} - \theta\right) \times \sin\left(\theta_0 - \frac{\theta_1}{2} - \theta\right),$

à gauche à : $\left(\theta_0 - \frac{\theta_1}{2} + \theta\right) \times \sin\left(\theta_0 - \frac{\theta_1}{2} + \theta\right).$

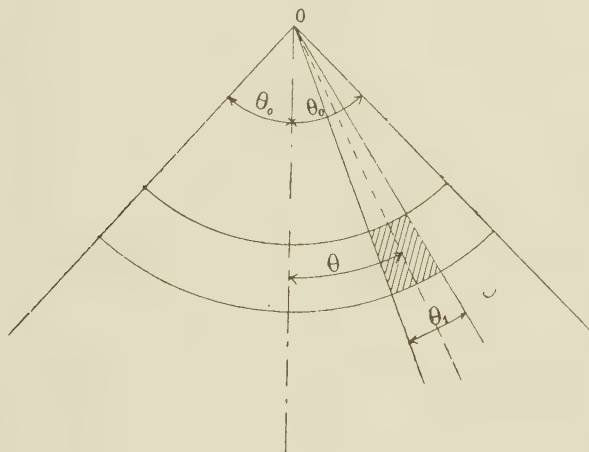


Fig. 12.

En posant :

$$\theta_0 - \frac{\theta_1}{2} = k_1,$$

et :

$$\theta_0 + \frac{\theta_1}{2} = k_2.$$

Le couple amortisseur peut s'écrire, à une constante près :

$$(k_1 + \theta) \times \sin \frac{1}{2} (k_2 - \theta) - (k_1 - \theta) \times \sin \frac{1}{2} (k_2 + \theta),$$

et, comme les angles θ sont toujours très petits, il vient :

$$(k_1 + \theta) (k_2 - \theta) - (k_1 - \theta) (k_2 + \theta) = 2\theta (k_2 - k_1).$$

Le couple amortisseur est donc bien proportionnel à θ , c'est-à-dire à la vitesse $\frac{d\alpha}{dt}$ de l'oscillation de la rose autour du méridien.

Les équations du § 33 sont donc rigoureusement applicables ici.

§ 37. — **Discussion du système amortisseur à jet d'air.** — Le système amortisseur à réaction d'air remplit bien la première condition exigée au § 32. Il ne crée évidemment aucun frottement lorsque la rose est en équilibre. Mais il ne satisfait pas à la seconde condition, car l'annulation du couple amortisseur résulte de l'égalité de deux couples de sens contraire, mais jamais nuls. Et ce n'est qu'à l'Équateur que l'axe de suspension du tore sera vertical, lorsque l'axe de rotation sera dans le plan méridien.

En tout autre lieu de la terre, l'axe de rotation du tore étant dans le plan méridien, l'axe de suspension fera avec la verticale un angle θ . Il en résultera immédiatement un couple déviateur créé par les jets d'air, et l'appareil déviara d'un angle α qu'il est facile de calculer. Remarquons de suite que cette déviation est indépendante du cap.

Pour des raisons analogues, une variation dans la vitesse de rotation du tore, donnant lieu à une variation de θ , fera dévier le compas. Cette déviation n'est pas, on le voit, un effet de la perturbation signalée au § 30, mais elle est bel et bien due à la réalisation du système amortisseur du gyroscope. Ceci constitue un très gros inconvénient quand le réseau électrique sur lequel est branché l'appareil est soumis à d'importantes variations de voltage (sous-marins); il en résulte que si le voltage varie souvent, le Nord ne sera jamais donné avec toute la précision que permet le compas gyroscopique.

§ 38. — **Calcul de l'erreur due au système amortisseur dans les changements en latitude.** — Il suffit d'introduire dans les équations générales d'équilibre (7), le couple $\mathcal{K} = F\theta$, dû au système amortisseur.

La seconde équation devient ainsi :

$$\mathfrak{J} \omega \Omega_y - F\theta = 0.$$

ou

$$\mathfrak{J} \omega \Omega \cos L \sin \alpha - F\theta = 0,$$

et, comme l'angle α est petit, on en déduit :

$$\alpha = \frac{F}{\mathfrak{J} \omega \Omega \cos L} \times \theta.$$

D'autre part, on se rappelle que la valeur de θ en fonction des données, est pratiquement : (Voir § 21, II, e).

$$\theta = \frac{3\omega\Omega \sin L}{Mga}.$$

D'où :

$$\alpha = \frac{F \tan L}{Mga}.$$

Dans l'hémisphère Nord, L est négatif, nous aurons donc une déviation α Est, et Ouest dans l'hémisphère Sud.

La déviation est infinie aux pôles : en effet, la force directrice est alors nulle : sous l'action du système amortisseur, le compas tournera indéfiniment.

Dans la pratique, on corrigera cette erreur en déplaçant de l'angle α dans le sens convenable, la ligne de foi placée sur la cuvette.

Si le bâtiment doit toujours naviguer au même lieu de la terre, sans effectuer de grands changements de latitude, par exemple, un sous-marin affecté à la défense de tel ou tel port, on pourra régler l'appareil pour annuler l'erreur dans ce port.

Il suffit pour cela de placer sur l'appareil des poids convenables pour annuler l'angle θ en cet endroit. Le calcul de ce poids est simple.

§ 39. — **Calcul des poids qu'il faut ajouter à l'appareil pour annuler l'angle θ en un lieu donné de la terre.** — Soit L_0 , la latitude de ce lieu. Nous appelons l la distance du centre de gravité du poids additionnel mg au point de suspension O , et γ l'angle de Og avec l'axe de suspension du gyroscope.

Il suffit d'introduire dans les équations d'équilibre (7) le couple supplémentaire :

$$mgl \sin(\theta + \gamma).$$

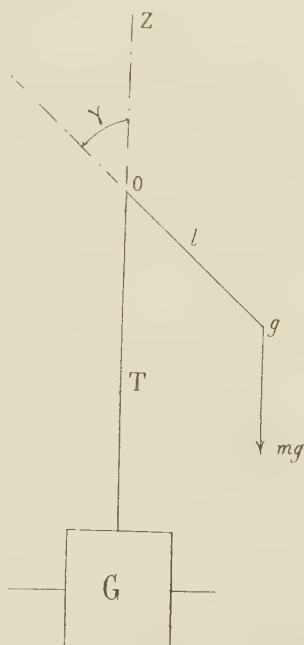


Fig. 13.

Il vient alors :

$$-\delta \omega \Omega \sin L_0 \cos \theta + \delta \omega \Omega \cos L_0 \cos \alpha \sin \theta + Mga \sin \theta + mgl \sin(\theta + \gamma) = 0.$$

ou, puisque dans la position d'équilibre θ est petit et que l'on doit avoir $\alpha = 0$:

$$-\delta \omega \Omega \sin L_0 + \delta \omega \Omega \cos L_0 \times \theta + Mga \theta + mgl \theta \cos \gamma + mgl \sin \gamma = 0$$

d'où l'on tire :

$$\theta = \frac{\delta \omega \Omega \sin L_0 - mgl \sin \gamma}{\delta \omega \Omega \cos L_0 + Mga + mgl \cos \gamma}.$$

L'expression de θ ne peut être nulle qui si :

$$mgl \sin \gamma = \delta \omega \Omega \sin L_0.$$

Cette expression détermine $mgl \sin \gamma$.

On voit que dans l'hémisphère Nord, L_0 étant négatif, l'angle γ doit être négatif, c'est-à-dire que les poids sont à ajouter du côté du pôle Nord de l'axe du tore. Ceci est évident, *a priori*, d'après les considérations du § 21 (II, α).

Évidemment, l'addition du poids mg , modifiant la valeur de Mg , modifie la valeur primitive de θ . Pour faire un calcul rigoureux, il faudrait procéder par approximations successives; mais, étant donnée la très faible valeur de θ , l'emploi d'une pareille méthode n'est nullement indiqué ici.

Le réglage fait pour la latitude L_0 n'est plus valable pour une latitude quelconque L . A cette latitude L , la déviation α sera donnée par la relation :

$$\alpha = \frac{F}{Mga} (\tan L - \tan L_0)$$

comme il résulte du § 38.

La déviation sera Est pour les latitudes au Nord de L_0 , et Ouest pour celles au Sud de L_0 .

§ 40. — **Autre remarque sur le système d'amortissement à réaction d'air.** — Il convient encore de remarquer que pour avoir un appareil facilement utilisable, il faut, devant l'énorme valeur de la période, avoir un amortissement considérable. Mais alors la position d'équilibre est beaucoup moins bien déterminée.

En d'autres termes, avec un grand amortissement, les déviations balistiques seront petites, il est vrai, mais la précision du Nord sera moindre qu'avec un faible amortissement.

§ 41. — **Compas gyroscopique Lemaire.** — Nous avons imaginé un système amortisseur absolument différent du système à air dont on vient de voir les très gros inconvénients.

Cet appareil a été breveté par Monsieur Doignon, et est construit par lui avec une haute compétence, à laquelle il nous plait ici de rendre hommage en priant Monsieur Doignon d'agréer tous nos remerciements pour les soins méticuleux et raisonnés apportés à la construction.

Nous n'en ferons pas ici ni la théorie qui mène à des calculs assez compliqués, ni la description qui serait un peu longue et d'ailleurs, dans cet ouvrage purement théorique, ce n'est pas le lieu de décrire des dispositifs de construction.

Le système amortisseur de notre compas répond très rigoureusement aux conditions du § 32. Il ne crée aucun frottement lorsque la rose est au Nord et il est absolument indépendant de la latitude; le couple amortisseur est rigoureusement nul lorsque la rose est au Nord, car ce couple ne résulte pas de la différence de deux couples inverses. La rose ne pourra donc plus dévier sous l'influence d'une variation de voltage.

Enfin la position du Nord est très précise malgré un amortissement considérable. Le calcul montre en effet, que, dans le cas où le frottement est proportionnel au carré de la vitesse, le décrement logarithmique des oscillations est fonction directe de l'amplitude de l'oscillation; par suite le couple amortisseur est également fonction de l'amplitude des oscillations. Il en résulte que pour des oscillations très petites, la valeur du couple amortisseur unité devient également petite, ce qui permet de compter sur une précision absolue des indications du compas.

Notre système amortisseur combine en effet l'amortissement proportionnel à la vitesse avec l'amortissement proportionnel au carré de la vitesse, le second mode d'amortissement n'entrant en action que pour les amplitudes très faibles des oscillations de la rose, amplitudes de l'ordre du degré.

CONCLUSION.

Nous allons récapituler les propriétés du compas gyroscopique afin de bien faire ressortir les gros avantages que présente cet appareil.

1° — L'axe d'un gyroscope suspendu de façon que le centre de gravité se trouve en dessous du point de suspension, s'oriente dans le plan du méridien géographique. Dans la position d'équilibre la rotation du tore et de la terre devant se faire dans le même sens, il en résulte que le compas gyroscopique possède véritablement, tout comme l'aiguille aimantée, un pôle Nord et un pôle Sud.

2° — *Le compas gyroscopique placé à bord d'un navire immobile, ou à terre, donne d'une façon mathématique la direction du Nord géographique sans aucune erreur possible.*

A l'Équateur, lorsque le compas est arrivé dans cette position d'équilibre, le plan de la rose est horizontal.

Il est facile, en tout lieu de la terre, de maintenir horizontal le plan de la rose au moyen de petites masses additionnelles correctrices. Le calcul de ces poids résulte d'une formule géométrique parfaitement déterminée.

Dans ces conditions, la bulle d'air d'un petit niveau de pente placé sur la rose et dont l'axe est parallèle à la ligne Nord-Sud tracée sur cette rose, se maintiendra toujours au milieu du niveau lorsque le compas indiquera le Nord.

Si la bulle n'est pas au milieu du niveau, on peut être assuré que le compas n'indique pas le Nord.

Si la bulle se tient au Sud du niveau, le compas possède un cap à l'Ouest du Nord. Au contraire le compas possède un cap à l'Est du Nord si la bulle est au Nord du niveau.

Ainsi le compas gyroscopique réglé et muni d'un niveau de pente indiquera lui-même à l'observateur s'il peut se fier à ses indications.

3° — A bord d'un navire qui fait route, le compas gyroscopique

possède une légère variation que donne une formule géométrique parfaitement déterminée.

La correction à effectuer est si faible qu'il n'y a vraiment lieu d'en tenir compte que si l'on fait une grande traversée comme c'est, par exemple, le cas des paquebots.

La variation est la même en grandeur et en signe dans l'hémisphère Nord et dans l'hémisphère Sud. Elle est également la même en grandeur que la route soit à l'Est ou à l'Ouest du méridien, mais son signe change suivant que la route est Nord ou Sud.

Les mêmes conclusions relatives à la bulle de niveau s'appliquent ici, mais il est bien entendu que la bulle se tient au milieu du niveau lorsque le compas indique le cap vrai qu'il possède, c'est-à-dire le Nord géographique augmenté algébriquement de la variation pour la route et la vitesse actuelles.

4° — Au moment précis où le navire modifie son allure ou sa route, le compas gyroscopique dévie. On ne peut corriger cette déviation qui est balistique, mais par une construction raisonnée de l'instrument, on peut toujours s'arranger pour que l'élongation maxima ne dépasse pas la limite que l'on s'est fixée à l'avance ; pratiquement l'élongation balistique maxima est de l'ordre de 2° tout au plus. La valeur de l'élongation maxima dépend de la valeur de la période des oscillations de l'appareil. Le calcul montre que cette période doit être pratiquement de l'ordre de 60 à 80 minutes. Il convient donc de ne compter sur les indications précises de l'instrument qu'environ deux heures après qu'on l'a mis en marche.

Il existe d'ailleurs une période bien déterminée pour laquelle le compas n'oscille pas lors d'un changement de route ou d'allure.

Enfin il résulte encore de ces remarques qu'il est nécessaire d'indiquer au constructeur le type de bâtiment sur lequel on se propose d'utiliser l'appareil, car on voit que sur les gros bâtiments on pourra choisir des périodes relativement faibles, alors que les grandes périodes sont de toute nécessité sur les petits bâtiments.

De plus, *lorsqu'un compas gyroscopique est ainsi utilisé sur le bâtiment qui lui convient, les déviations dues au roulis et au tangage sont pratiquement nulles.*

5° — Pour terminer, nous insisterons encore d'une façon particulière sur ce fait qu'un compas gyroscopique, dont l'orientation est le

résultat d'un théorème de Mécanique rationnelle, est très rigoureusement insensible aux influences magnétiques quelle que soit leur provenance. Il donne la direction du Nord géographique et ne possède aucune variation présentant un caractère aussi empirique qu'une variation de compas magnétique.

C'est donc par excellence le compas étalon, et sa place se trouve tout indiquée sur les sous-marins, dans les blockhaus et les fonds des cuirassés, sur les paquebots rapides ou les cargo-boats qui n'ont pas toujours les loisirs de régler les compas magnétiques malgré le danger que peut présenter pour la navigation le fret nouveau embarqué avant l'appareillage.

A ce titre, le compas gyroscopique est appelé à rendre à la marine « en fer et en acier » les services précieux que l'aiguille aimantée a rendus à la marine « en bois ».

Octobre 1909.

Note sur la valeur de la rotation propre dans le compas
gyroscopique.

La rotation propre φ dans le compas gyroscopique est sans doute très petite, mais il est inexact de dire qu'elle est nulle.

Reprenons la figure 6, mais en supposant que la ligne des nœuds OA ne coïncide pas avec Oy.

Les conventions du § 9 sont conservées.

Pour plus de commodité, nous emploierons l'angle de précession α au lieu de ψ , et l'angle de rotation propre β au lieu de φ .

Il est d'ailleurs facile de voir sur la figure que les angles θ et α sont positifs, β est négatif.

$$\alpha = \psi - \frac{\pi}{2}$$

et :

$$\beta = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

puisque OA perpendiculaire par définition à Oz et à Oz' est, par suite, perpendiculaire à OC et à OB qui sont contenus dans le plan z'Oz.

Expressions de p, q, r. — En projetant $p, q, r, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, \Omega, \alpha', \beta', \theta'$ respectivement sur OA, OB, Oz, on obtient :

Projection sur	OA	OB	Oz
p	$-p \sin \beta$	$p \cos \beta$	0
q	$q \cos \beta$	$q \sin \beta$	0
r	0	0	r
α'	0	$-\alpha' \sin \theta$	$\alpha' \cos \theta$
β'	0	0	β'
θ'	θ'	0	0

On a de même :

Projection sur	OA	OB	Oz
Ω_x	$-\Omega_x \sin \beta$	$\Omega_x \cos \beta$	0
Ω_y	$\Omega_y \cos \beta$	$\Omega_y \sin \beta$	0
Ω_z	0	0	Ω_z
Ω	$-\Omega \cos L \sin \alpha$	$\Omega \cos L \cos \alpha \cos \theta$ $+ \Omega \sin L \sin \theta$	Ω_z

d'où

$$p = \Omega_x - \alpha' \sin \theta \cos \beta - \theta' \sin \beta,$$

avec :

$$\Omega_x = \Omega \cos L \sin \alpha \sin \beta + \Omega \cos L \cos \alpha \cos \theta \cos \beta + \Omega \sin L \sin \theta \cos \beta.$$

Expressions de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. — On a toujours :

$$\mathfrak{A} = Ap + \delta \omega \quad \mathfrak{B} = Bq \quad \mathfrak{C} = Cr,$$

d'où :

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = A \frac{dp}{dt} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = B \frac{dq}{dt} \quad \frac{d\mathfrak{C}}{dt} = C \frac{dr}{dt}.$$

Expressions de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. — Le moment du couple est représenté par un vecteur placé le long de OA. On a donc :

$$\mathfrak{L} = -Mga \sin \theta \sin \beta.$$

$$\mathfrak{M} = -Mga \sin \theta \cos \beta.$$

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Équation générale du mouvement de rotation propre. — La première équation d'Euler devient :

$$A(\Omega_x - \alpha' \sin \theta \cos \beta - \theta' \sin \beta)' + (C - B)qr = -Mga \sin \theta \sin \beta.$$

Les deux dernières équations d'Euler permettent de définir le mouvement du compas gyroscopique lorsque les angles α , θ , et β sont petits.

En portant les valeurs ainsi obtenues pour α et θ avec les deux dernières équations, dans la première équation, celle-ci permet de définir β .

On a trouvé :

$$\alpha = \alpha_0 \sin Rt.$$

$$\theta = -\frac{\partial \omega}{Mga} (\alpha_0 R \cos Rt - \Omega \sin L).$$

L'intégration de la première équation est un peu compliquée, mais on peut simplifier beaucoup les calculs si l'on admet que le compas est construit de telle façon que $B = C$.

Cela est à peu près réalisé dans la pratique, mais, en outre, cette hypothèse est permise : la forme des mouvements de l'appareil est en effet indépendante de sa construction; seules, les valeurs numériques des constantes varieront d'un appareil à l'autre. D'ailleurs, ceci revient à négliger les termes de second ordre des vitesses angulaires.

L'équation du mouvement de rotation propre s'écrit donc :

$$A (\Omega_x - \alpha' \sin \theta \cos \beta - \theta' \sin \beta) = -Mga \sin \theta \sin \beta.$$

Si l'on s'en tient aux angles α petits, et si l'on considère que les angles β et θ sont très petits, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} (\Omega \cos L \alpha \beta + \Omega \cos L + \Omega \sin L \theta - \alpha' \theta - \theta' \beta) + \frac{Mga}{A} \theta \beta = 0.$$

ou :

$$\begin{aligned} \beta' (\Omega \cos L \alpha - \theta') + \beta \left(\Omega \cos L \alpha' - \theta'' + \frac{Mga}{A} \theta \right) \\ = \alpha' \theta' + \alpha'' \theta - \Omega \sin L \theta'. \end{aligned}$$

Remplaçons α , θ , α' , θ' , α'' , θ'' par leurs valeurs en fonction du temps et des constantes de l'appareil, il vient :

$$\begin{aligned} \beta' \left(\alpha_0 \Omega \cos L \sin Rt - \frac{\partial \omega}{Mga} \alpha_0 R^2 \sin Rt \right) \\ + \beta \left(\alpha_0 R \Omega \cos L \cos Rt - \frac{\partial \omega}{Mga} \alpha_0 R^2 \cos Rt - \frac{\partial \omega}{A} \alpha_0 R \cos Rt + \frac{\partial \omega}{A} \Omega \sin L \right) \\ = \frac{\partial \omega}{Mga} \alpha_0^2 R^2 \sin Rt \cos Rt + \frac{\partial \omega}{Mga} \alpha_0^2 R^2 \sin Rt \cos Rt - \frac{\partial \omega}{Mga} \alpha_0 R^2 \Omega \sin L \sin Rt \\ - \frac{\partial \omega}{Mga} \alpha_0 R^2 \Omega \sin L \sin Rt. \end{aligned}$$

Posons pour simplifier l'écriture :

$$P = \alpha_0 \left(\Omega \cos L - \frac{\dot{\omega}}{Mga} R^2 \right).$$

$$Q = \alpha_0 R \left(\Omega \cos L - \frac{\dot{\omega}}{Mga} R^2 - \frac{\dot{\omega}}{A} \right).$$

$$S = \frac{\dot{\omega}}{A} \Omega \sin L.$$

$$V = 2 \frac{\dot{\omega}}{Mga} \alpha_0^2 R^3.$$

$$W = -2 \frac{\dot{\omega}}{Mga} \alpha_0 R^2 \Omega \sin L.$$

L'équation pourra s'écrire :

$$(4) \quad \beta' \times P \sin Rt + \beta (Q \cos Rt + S) = V \sin Rt \cos Rt + W \sin Rt.$$

Nous avons là une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme :

$$\frac{d\beta}{dt} + A\beta = B.$$

A et B étant des fonctions de t .

L'intégrale générale est de la forme :

$$\beta = e^{-\int A dt} \left(\int B e^{\int A dt} + C \right).$$

Intégrons d'abord dans le cas particulier où le compas gyroscopique se trouve à l'Équateur. Dans ce cas $L = 0$. Il s'ensuit que $S = 0$, $W = 0$.

L'équation différentielle pourra s'écrire :

$$(2) \quad \beta' + \beta \times \frac{Q}{P} \cotang Rt = \frac{V}{P} \cos Rt.$$

L'intégrale $\int A dt$ donne :

$$\frac{Q}{P} \int \cotang Rt dt = \frac{Q}{P} \times \frac{1}{R} \log_e \sin Rt.$$

Le premier facteur de l'intégrale générale est donc :

$$e^{-\frac{Q}{PR} \log_e \sin Rt} = (\sin Rt)^{-\frac{Q}{PR}}.$$

L'intégrale $\int B e^{\int A dt}$ donnera :

$$\frac{V}{P} \int \cos R t \times (\sin R t)^{\frac{Q}{PR}} dt = \frac{V}{PR} \times \frac{(\sin R t)^{\frac{Q}{PR} + 1}}{\frac{Q}{PR} + 1}.$$

Nous aurons donc pour $\beta_{\text{équateur}}$:

$$\beta_{\text{équateur}} = \frac{V}{Q + PR} \sin R t + C (\sin R t)^{-\frac{Q}{PR}}.$$

La constante C est nulle. En effet, la vitesse est :

$$\beta' = \frac{VR}{Q + PR} \cos R t + C \frac{d}{dt} \left[(\sin R t)^{-\frac{Q}{PR}} \right].$$

En remplaçant alors dans l'équation (2), β et β' par leurs valeurs il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{VR}{Q + PR} \cos R t + C \frac{d}{dt} \left[(\sin R t)^{-\frac{Q}{PR}} \right] \\ & + \frac{VQ}{P(Q + PR)} \cos R t + C \times (\sin R t)^{-\frac{Q}{PR}} \cotang R t = \frac{V}{P} \cos R t. \end{aligned}$$

Les termes en $\cos R t$ se détruisent comme il est facile de le voir, il reste l'équation :

$$C \times \left\{ \frac{d}{dt} \left[(\sin R t)^{-\frac{Q}{PR}} \right] + (\sin R t)^{-\frac{Q}{PR}} \cotang R t \right\} = 0,$$

qui doit être satisfaite quel que soit t , ce qui entraîne $C = 0$.

En résumé, à l'Équateur, le mouvement de rotation propre est donné par la relation :

$$\beta_{\text{équateur}} = \frac{V}{Q + PR} \times \sin R t.$$

En remplaçant V, Q et P par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{V}{Q + PR} = \frac{2 \frac{\partial \omega}{Mga} \alpha_0^2 R^3}{\alpha_0 R \left(2\Omega - 2 \frac{\partial \omega}{Mga} R^2 - \frac{\partial \omega}{A} \right)}.$$

Pratiquement $\frac{\beta \omega}{A}$ est très grand devant l'ensemble $\left(2\Omega - \frac{2\beta \omega}{Mga} R^2\right)$ qui est voisin de zéro. On peut donc poser sensiblement à l'Équateur :

$$\frac{V}{Q + PR} = -\frac{2A\alpha_0 R^2}{Mga} = -\frac{2A\alpha_0 \Omega}{\beta \omega}.$$

Finalement :

$$\beta_{\text{équateur}} = -\frac{2A\alpha_0 \Omega}{\beta \omega} \sin Rt = \frac{2A\alpha_0 \Omega}{\beta \omega} \sin(Rt + \pi).$$

A l'Équateur le mouvement de rotation propre est un mouvement sinusoïdal de l'axe gyroscopique par rapport à la ligne des nœuds. Ce mouvement est de même période T que le mouvement de précession et il est en opposition avec le mouvement de précession.

Quand l'angle de précession croît vers l'Ouest, l'angle de rotation propre croît vers l'Est; l'amplitude de l'oscillation croît avec l'écart initial de l'angle de précession. Le mouvement de rotation propre tend donc à augmenter l'écart de l'axe du gyroscope avec le méridien.

Cette loi est vraie à toute latitude.

Par raison de continuité, à une latitude quelconque, le mouvement est encore défini par une relation de la forme :

$$\beta = \beta_0 \sin Rt.$$

Il est facile d'avoir la valeur numérique de β_0 .

Il suffit de résoudre en β l'équation (1) dans laquelle on fera à la fois $\beta' = 0$ et $t = \frac{T}{4}$.

Il vient :

$$\beta_0 = \frac{W}{S},$$

c'est-à-dire :

$$\beta_0 = -\frac{2AR^2}{Mga} = -\frac{2A\Omega \cos L}{\beta \omega} \alpha_0.$$

Cette relation montre que la loi énoncée à l'Équateur est générale :

On remarquera que l'amplitude du mouvement de rotation propre, toutes choses égales d'ailleurs, croît comme le cosinus de la latitude.

L'angle β_0 est d'ailleurs fort petit car $\beta \omega$ est très grand devant $2A\Omega \cos L$.

Ordre de grandeur des différentes constantes d'un compas gyroscopique.

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} = 72,7.10^{-6}, \text{ radian/seconde.}$$

$$\omega \text{ environ } 2.000 \text{ radians/seconde.}$$

$$\lambda \text{ environ } 150.10^3 \text{ grammes.cm}^2.$$

$$Mga \text{ environ } 20.10^6.$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial ga} \text{ environ } 15.$$

$$C \text{ environ } 350.10^3 \text{ grammes.cm}^2.$$

$$\frac{C}{\partial \omega} \text{ environ } 0,001.$$

$$T_{\text{comp.}} \text{ (à Paris) environ } 5.000 \text{ secondes.}$$

$$K_z \text{ (à l'Équateur) environ } 20.000 \text{ dynes.cms.}$$

$$\theta_{\text{maximum}} \text{ (à l'Équateur) environ } 1^\circ \text{ (pour } \alpha_0 = 10^\circ).$$

$$\theta_{\text{équilibre}} \text{ (au pôle) environ } 3'45''.$$

$$\beta_{\text{maximum}} \text{ (à l'Équateur) environ } 0'',01 \text{ (pour } \alpha_0 = 10^\circ).$$

Décroissement logarithmique des oscillations de 0,5 à 2,5.

Table donnant les valeurs de $\frac{\cos R_v}{900 \cos L}$.

La table donne pour les latitudes courantes de dix en dix degrés, et pour les routes de dix en dix degrés comptées à la façon ordinaire de 0° à 90° vers l'Est ou vers l'Ouest, en partant du méridien la valeur de :

$$W^0 = \frac{\cos R_v}{900 \cos L} \frac{180}{\pi}.$$

Route à	LATITUDE.							
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
0° du méridien.....	0,064	0,065	0,068	0,074	0,083	0,099	0,127	0,186
10°	0,063	0,064	0,068	0,072	0,082	0,098	0,125	0,183
20°	0,060	0,061	0,064	0,069	0,078	0,093	0,120	0,175
30°	0,055	0,056	0,059	0,064	0,072	0,086	0,110	0,161
40°	0,049	0,050	0,052	0,056	0,064	0,076	0,098	0,143
50°	0,041	0,042	0,044	0,047	0,053	0,064	0,082	0,120
60°	0,032	0,032	0,034	0,037	0,042	0,050	0,064	0,093
70°	0,022	0,022	0,023	0,025	0,028	0,034	0,044	0,064
80°	0,011	0,011	0,012	0,013	0,014	0,017	0,022	0,032
90°	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

La variation est « Ouest » si la route est « Nord ».

La variation est « Est » si la route est « Sud ».

Pour avoir la valeur de W, qui correspond à la vitesse actuelle du navire, il suffit de multiplier le chiffre trouvé dans cette table par le nombre qui mesure en *nœuds* la vitesse du bâtiment.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 juin 1911.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 juin 1911.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Sur le frottement qu'exerce l'air
sur un disque tournant d'un mouvement uniforme.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 juin 1911.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 juin 1911.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

PARIS. — IMPRIMERIE R. CHAPELOT ET C^e, RUE CHRISTINE, 2.
